Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Semi-k-free Integers

Let k be a fixed integer $\geqq 2$. A positive integer n is called semi-k-free if the multiplicity of each prime factor of n is not equal to k or equivalently, if n is not divisible unitarily by the k-th power ot any prime. The integer 1 is also considered to be semi-k-free. Let x denote a real variable $\geqq 1$ and let $Q_k^*(x)$ denote the number of semi-k-free integers $\leqq x$. The object of the present note is to prove the following:

Theorem.

$$Q_k^*(x) = \alpha_k^* \, x + O(x^{1/k}) ,$$

where

$$\alpha_k^* = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right),$$

the product being extended over all primes p.

Let $\mu(n)$ denote the Möbius function and $\varphi(x, n)$ denote the Legendre totient function, defined to be the number of positive integers $\leqq x$ which are prime to n. Let $\varphi(n) = \varphi(n, n)$ be the Euler totient function. We need the following three lemmas to prove the above theorem.

Lemma 1. For each s, $0 \leqq s < 1$, we have

$$\varphi(x, n) = x \frac{\varphi(n)}{n} + O\,(x^s \sigma_{-s}(n)) ,$$

where $\sigma_{-s}(n)$ is the sum of the s-th powers of the reciprocals of the divisors of n.

Proof: It is well-known that $\varphi(x, n) = \sum_{d|n} \mu(d)\,[x/d]$. Since $[x] = x + O(x^s)$, for every s with $0 \leqq s < 1$, we have

$$\varphi(x, n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left\{\frac{x}{d} + O\left(\frac{x^s}{d^s}\right)\right\} = x \frac{\varphi(n)}{n} + O\left(x^s \sum_{d|n} d^{-s}\right).$$

Hence lemma 1 follows.

Lemma 2.

$$\alpha_k^* \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\varphi(n)}{n^{k+1}} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right).$$

Proof: Since $\mu(n)$ and $\varphi(n)$ are multiplicative and the series is absolutely convergent, we can expand the series into an infinite product of Euler type (cf. [1], theorem 286). Hence, we have

$$\alpha_k^* = \prod_p \left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(p^m)\,\varphi(p^m)}{p^{m(k+1)}}\right\} = \prod_p \left\{1 - \frac{p-1}{p^{k+1}}\right\},$$

so that lemma 2 follows.

Lemma 3 (cf. [2], theorem 2.4). If $g(n)$ and $h(n)$ are multiplicative, then $f_k(n) = \sum_{\substack{d^k\delta = n \\ (d,\delta)=1}} g(d)\,h(\delta)$ is also multiplicative.

Proof of the theorem. Let $q_k^*(n) = \sum_{\substack{d^k\delta = n \\ (d,\delta)=1}} \mu(d)$. Then by lemma 3, it follows that $q_k^*(n)$ is multiplicative. Moreover, $q_k^*(p^\alpha) = 1$ or 0 according as $\alpha \neq k$ or $\alpha = k$. Hence $q_k^*(n) = 1$ or 0 according as n is or is not semi-k-free, so that

$$Q_k^*(x) = \sum_{n \leqslant x} q_k^*(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{d^k\delta = n \\ (d,\delta)=1}} \mu(d) = \sum_{\substack{d^k\delta \leqslant x \\ (d,\delta)=1}} \mu(d)$$

$$= \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \mu(d) \sum_{\substack{\delta \leqslant x/d^k \\ (\delta, d)=1}} 1 = \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \mu(d)\, \varphi\left(\frac{x}{d^k}, d\right).$$

Hence by lemmas 1 and 2,

$$Q_k^*(x) = \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \mu(n) \left\{ x \frac{\varphi(n)}{n^{k+1}} + O\left(x^s \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}}\right)\right\}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\varphi(n)}{n^{k+1}} + O\left(x \sum_{n > \sqrt[k]{x}} \frac{1}{n^k}\right) + O\left(x^s \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}}\right)$$

$$= \alpha_k^* x + O(x^{1/k}) + O\left(x^s \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}}\right). \tag{1}$$

Now, choosing $0 < s < 1/k$, we obtain

$$\sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}} = \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{n^{sk}} \sum_{d\delta = n} \frac{1}{d^s} = \sum_{d\delta \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}\,\delta^{sk}} = \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}} \sum_{\delta \leqslant \frac{\sqrt[k]{x}}{d}} \frac{1}{\delta^{sk}}$$

$$= O\left(\sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}} \left(\frac{\sqrt[k]{x}}{d}\right)^{1-sk}\right) = O\left(x^{1/k-s} \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s+1}}\right) = O\left(x^{1/k-s}\right).$$

Hence from (1), the theorem follows.

D. Suryanarayana, Waltair, India

REFERENCES

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford 1965).

[2] D. Suryanarayana, *Two Arithmetic Functions and Asymptotic Densities of Related Sets*, Portugaliae Mathematica (to appear in vol. 30 (1971).

Bemerkung zu einer Anwendung des Bertrandschen Postulats in der Zahlentheorie

Durch Anwendung des Bertrandschen Postulats kann man das folgende interessante Ergebnis beweisen:

Keine der Partialsummen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n > 1)$$

der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist ganz (siehe [1], S. 139, Exercise 2).

Eine der erwähnten Anwendung des Bertrandschen Postulats ähnliche Methode ermöglicht uns, einige Ergebnisse über Partialsummen einiger Teilreihen der harmonischen Reihe zu beweisen (die Teilreihen der harmonischen Reihe nennt man Ahmessche Reihen, vgl. [2]).

Im folgenden bedeutet $a_1 < a_2 < \cdots$ eine Folge von natürlichen Zahlen und $P(x)$ bezeichnet die Anzahl derjenigen Indices i, für welche $a_i \leqq x$ (x ist eine reelle Zahl) und a_i eine Primzahl ist.

Satz 1. Haben $a_1 < a_2 < \cdots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und setzen wir voraus, dass für ein geeignetes m die Ungleichung

$$\frac{P(a_m)}{P\left(\frac{a_m}{2}\right)} > 1$$

gilt, dann ist die Summe $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ nicht ganz.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $P(a_m/2) < P(a_m)$. Aus der Definition von $P(x)$ folgt die Existenz eines Index $i \leqq m$, mit der Eigenschaft, dass a_i eine Primzahl p ist und

$$\frac{a_m}{2} < p \leqq a_m \tag{1}$$

gilt.

Bezeichnen wir mit B das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und setzen $A_k = B/a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, dann haben wir

$$S_m = \frac{A}{B}, \quad A = \sum_{k=1}^{m} A_k . \tag{2}$$

Mit (1) sieht man unmittelbar, dass $p \mid B$, $p^2 \nmid B$ und $p \nmid a_k$ für $k \leqq m$, $k \neq i$. Daraus und aus der Definition der Zahlen A_k folgt $p \mid A_k$ für $k \leqq m$, $k \neq i$ und $p \nmid A_i$. Infolgedessen

$$p \nmid A . \tag{3}$$

Falls S_m eine ganze Zahl wäre, dann würde $p \mid A$ aus (2) und $p \mid B$ folgen. Das steht aber im Widerspruch zu (3).

Eine leichte Folgerung aus Satz 1 ist

Satz 2. Haben $a_1 < a_2 < \ldots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und ist

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{P(x)}{P\left(\frac{x}{2}\right)} > 1 , \tag{4}$$

dann existiert ein m_0 derart, dass keine der Partialsummen $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ $(m \geqq m_0)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$ ganz ist.

Beweis. Es genügt festzustellen, dass aus (4) die Unendlichkeit der Folge $a_1 < a_2 < \ldots$ folgt. Alles übrige ist klar.

Satz 2 ermöglicht uns eine Aussage über die Nicht-Ganzheit der Partialsummen einiger Ahmesschen Reihen.

Satz 3. Haben $a_1 < a_2 < \ldots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und existieren zwei Konstanten c, α derart, dass $c > 0$, $\alpha \geqq 0$ und

$$P(x) \sim \frac{c\,x}{\log^{\alpha} x} \text{ [1]} \tag{5}$$

gilt, dann existiert ein m_0, so dass keine der Partialsummen $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ $(m \geqq m_0)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$ ganz ist.

Beweis. Die Unendlichkeit der Folge $a_1 < a_2 < \ldots$ folgt aus (5). Durch eine leichte Rechnung bekommt man

$$\frac{P(x)}{P\left(\frac{x}{2}\right)} \sim 2\left(\frac{\log x - \log 2}{\log x}\right)^{\alpha} \to 2 .$$

Satz 3 folgt nun aus Satz 2.

---

[1]) $f(x) \sim g(x)$ bedeutet $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Mit Hilfe von Satz 3 beweisen wir jetzt den folgenden Satz, welcher eine Erweiterung des oben erwähnten Ergebnisses aus [1] darstellt.

Satz 4. Es seien a, d natürliche Zahlen. Dann existiert ein m_0 derart, dass keine der Partialsummen $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/(a + (k-1)\,d)$ $(m \geqq m_0)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(a + (k-1)\,d)$ ganz ist.

Beweis. Es sei δ der grösste gemeinsame Teiler von a, d. In $a = a'\delta$, $d = d'\,\delta$ sind die Zahlen a', d' teilerfremd. Nun setzen wir $a_k = a' + (k-1)\,d'$ $(k = 1, 2, \ldots)$. $P(x)$ bezeichne wieder die Anzahl aller Primzahlen $p \leqq x$, welche in der Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ enthalten sind. Bekanntlich ist

$$P(x) \sim \frac{x}{\varphi(d')\log x},$$

wo φ die Eulersche Funktion bezeichnet (siehe [3], S. 130).

Auf Grund von Satz 3 existiert ein m_0, so dass keine der Summen $S'_m = \sum_{k=1}^{m} 1/(a' + (k-1)\,d')$ $(m \geqq m_0)$ ganz ist. Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus $S_m = (1/\delta)\,S'_m$.

Die Tatsache, dass keine der Partialsummen $\sum_{k=1}^{m} 1/k$ $(m > 1)$ der harmonischen Reihe ganz ist, führt zur Frage, ob eine analoge Aussage auch für die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$ gilt, wobei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine arithmetische Folge (natürlicher Zahlen) ist.

TIBOR ŠALÁT, Bratilsava, ČSSR

LITERATUR

[1] W. SIERPIŃSKI, *Elementary Theory of Numbers* (Warszawa 1964).
[2] P. ERDÖS, G. STRAUS, *On the Irrationality of Certain Ahmes Series*, J. Indian Math. Soc. *27*, 129–133 (1963).
[3] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung* (russische Übersetzung) (Moskau 1967).

Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln

Für die Untersuchung schlichter Komplexzerlegungen endlicher abelscher Gruppen beweist L. RÉDEI ([1], S. 361) folgenden Satz, der auch an sich von Interesse ist:

Satz. *Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist die Gliederzahl einer verschwindenden (nichtleeren) Summe n-ter (nicht notwendig verschiedener) komplexer Einheitswurzeln nicht kleiner als der kleinste Primteiler von n.*

Der RÉDEIsche Beweis dieses Satzes läuft über eine Reihe von Summationsumformungen und Fallunterscheidungen und ist «unerwartet mühsam».

Im folgenden geben wir einen sehr einfachen algebraischen Beweis für den schärferen

Satz*. *Ist p der kleinste Primteiler der natürlichen Zahl $n > 1$, so sind weniger als p paarweise verschiedene komplexe n-te Einheitswurzeln über dem Körper K der rationalen Zahlen stets linear unabhängig.*

Beweis: Wir erinnern zunächst an einige einfache Resultate der Theorie der Kreisteilungskörper (vgl. VAN DER WAERDEN [2], § 42, § 60). Für $m > 1$ bezeichne dazu K_m den m-ten Kreisteilungskörper und ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel über K. Ist q eine Primzahl und $m = q\,t$, so gilt für den Grad $|K_m : K_t|$ von K_m über K_t

$$|K_m : K_t| = \begin{cases} q, & \text{falls } q \mid t \\ q-1, & \text{falls } q \nmid t. \end{cases}$$

Für $q \mid t$ ist die Menge $\mathfrak{M} = \{1, \zeta_m, \ldots, \zeta_m^{q-1}\}$ eine Basis von K_m über K_t; für $q \nmid t$ erhält man Basen von K_m über K_t, wenn man aus $\mathfrak{M}$ jeweils ein Element herausnimmt.

Den Beweis des Satzes führen wir nun durch vollständige Induktion über die Teiler von n.

Ist m ein Primteiler von n, so gilt nach Voraussetzung $p \leqslant m$ und nach der Vorbemerkung sind sogar je $m - 1$ paarweise verschiedene m-te Einheitswuzeln über K linear unabhängig. Damit ist der Induktionsbeginn erledigt.

Wir nehmen nun an, dass der Satz für alle echten Teiler von n richtig sei und setzen $t = n/p$. Wäre nun $r \leqslant p - 1$ und wären $\xi_1, \ldots, \xi_r$ r paarweise verschiedene linear abhängige n-te Einheitswurzeln über K, so hätte man eine Gleichung

$$a_1 \xi_1 + \ldots + a_i \xi_i + \ldots + a_r \xi_r = 0 , \tag{1}$$

in der die a_i rationale Zahlen sind, die wir o.B.d.A. als von Null verschieden annehmen dürfen. Jedes ξ_i lässt sich in der Form

$$\xi_i = \eta_i \zeta_n^{f_i} \tag{2}$$

darstellen, wo $\eta_i \in K_t$ und $0 \leqslant f_i \leqslant p - 1$ ist. Wir können daher (1) durch geeignete Zusammenfassung überführen in

$$S_0 + S_1 \zeta_n + \ldots + S_{p-1} \zeta_n^{p-1} = 0 . \tag{3}$$

Hierbei sind die S_j entweder leer oder Linearkombinationen t-ter Einheitswurzeln. Natürlich sind nicht alle S_j leer.

Wegen $r \leqslant p - 1$ ist mindestens ein S_j leer. Von den Elementen $1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{p-1}$ treten daher in (3) höchstens $p - 1$ Elemente auf. Diese sind aber über K_t linear unabhängig; mithin müssen in (3) die nichtleeren S_j verschwinden.

Aus (2) ist nun ersichtlich, dass die nichtleeren S_j Linearkombinationen paarweise verschiedener t-ter Einheitswurzeln sind. Natürlich treten in keinem solchen S_j mehr als r Glieder auf, und das ist ein Widerspruch zur Induktionsannahme. Die $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sind also entgegen unserer Annahme linear unabhängig. E. WITTMANN, Erlangen

LITERATUR

[1] L. RÉDEI, *Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós*, Acta math. Acad. Sci. Hung. *XVI*, 329–373 (1965).
[2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, 7. Auflage (Springer 1966).

Aufgaben

Aufgabe 618. Ist für jede Primzahl $p > 2$ $\eta(p)$ die kleinste natürliche Zahl k mit $2^k \equiv 1 \pmod{p}$, $E(r)$ für $r \geqslant 2$ die Anzahl der Primzahlen p mit $\eta(p) = r$ und $A(x, \delta)$ für $0 < \delta < 1$ die Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leqslant x$ und $\eta(p) > p^\delta$, so gilt:

$$E(r) \leqslant \ln 2 \cdot \frac{r}{\ln r} \; (r \geqslant 2) , \qquad A(x, \delta) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$$

und

$$A\left(x, \frac{1}{2}\right) \geqslant (1 - \ln 2) \cdot \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad (x \to \infty) .$$

Man beweise diese Behauptungen. G. Jaeschke, Sindelfingen