

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Den Beweis des Satzes führen wir nun durch vollständige Induktion über die Teiler von  $n$ .

Ist  $m$  ein Primteiler von  $n$ , so gilt nach Voraussetzung  $p \leq m$  und nach der Vorbemerkung sind sogar je  $m - 1$  paarweise verschiedene  $m$ -te Einheitswurzeln über  $K$  linear unabhängig. Damit ist der Induktionsbeginn erledigt.

Wir nehmen nun an, dass der Satz für alle echten Teiler von  $n$  richtig sei und setzen  $t = n/p$ . Wäre nun  $r \leq p - 1$  und wären  $\xi_1, \dots, \xi_r$  paarweise verschiedene linear abhängige  $n$ -te Einheitswurzeln über  $K$ , so hätte man eine Gleichung

$$a_1 \xi_1 + \dots + a_i \xi_i + \dots + a_r \xi_r = 0, \quad (1)$$

in der die  $a_i$  rationale Zahlen sind, die wir o. B. d. A. als von Null verschieden annehmen dürfen. Jedes  $\xi_i$  lässt sich in der Form

$$\xi_i = \eta_i \zeta_n^{f_i} \quad (2)$$

darstellen, wo  $\eta_i \in K_t$  und  $0 \leq f_i \leq p - 1$  ist. Wir können daher (1) durch geeignete Zusammenfassung überführen in

$$S_0 + S_1 \zeta_n + \dots + S_{p-1} \zeta_n^{p-1} = 0. \quad (3)$$

Hierbei sind die  $S_j$  entweder leer oder Linearkombinationen  $t$ -ter Einheitswurzeln. Natürlich sind nicht alle  $S_j$  leer.

Wegen  $r \leq p - 1$  ist mindestens ein  $S_j$  leer. Von den Elementen  $1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{p-1}$  treten daher in (3) höchstens  $p - 1$  Elemente auf. Diese sind aber über  $K_t$  linear unabhängig; mithin müssen in (3) die nichtleeren  $S_j$  verschwinden.

Aus (2) ist nun ersichtlich, dass die nichtleeren  $S_j$  Linearkombinationen paarweise verschiedener  $t$ -ter Einheitswurzeln sind. Natürlich treten in keinem solchen  $S_j$  mehr als  $r$  Glieder auf, und das ist ein Widerspruch zur Induktionsannahme. Die  $\xi_1, \dots, \xi_r$  sind also entgegen unserer Annahme linear unabhängig. E. WITTMANN, Erlangen

## LITERATUR

- [1] L. RÉDEI, *Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós*, Acta math. Acad. Sci. Hung. XVI, 329–373 (1965).  
 [2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, 7. Auflage (Springer 1966).

## Aufgaben

**Aufgabe 618.** Ist für jede Primzahl  $p > 2$   $\eta(p)$  die kleinste natürliche Zahl  $k$  mit  $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $E(r)$  für  $r \geq 2$  die Anzahl der Primzahlen  $p$  mit  $\eta(p) = r$  und  $A(x, \delta)$  für  $0 < \delta < 1$  die Anzahl aller Primzahlen  $p$  mit  $p \leq x$  und  $\eta(p) > p^\delta$ , so gilt:

$$E(r) \leq \ln 2 \cdot \frac{r}{\ln r} \quad (r \geq 2), \quad A(x, \delta) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$$

und

$$A\left(x, \frac{1}{2}\right) \geq (1 - \ln 2) \cdot \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Man beweise diese Behauptungen.

G. Jaeschke, Sindelfingen

*Lösung:* Für festes  $r \geq 2$  setzen wir

$$2^r - 1 = (p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}) (q_1^{b_1} \dots q_t^{b_t}), \quad (1)$$

wo  $p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) genau diejenigen Primzahlen bezeichnen, für die  $p_i \nmid (2^j - 1)$  für  $2 \leq j < r$ , falls solche überhaupt vorkommen; dann ist  $s = E(r)$ . (Andernfalls ist  $E(r) = 0$  und die Behauptung bereits bewiesen.) Nach dem kleinen Fermatschen Satz ist  $p_i \mid (2^{p_i-1} - 1)$  für  $1 \leq i \leq s$  und daher  $p_i - 1 \geq r$ . Aus (1) folgt durch Abschätzen

$$2^r > p_1 \dots p_s \geq (r+1)^s > r^{E(r)},$$

was unmittelbar die erste Behauptung liefert.

Offensichtlich ist jetzt für  $0 < \delta < 1$

$$A(x, \delta) = \sum_{\substack{p \leq x \\ \eta(p) > p^\delta}} 1 = \sum_{p \leq x} 1 - \sum_{\substack{p \leq x \\ \eta(p) \leq p^\delta}} 1; \quad (2)$$

nach dem Primzahlsatz ist die erste Summe rechts in (2) gleich  $(x/\ln x) (1 + o(1))$  für  $x \rightarrow \infty$ . In der zweiten vergrößern wir auf

$$\sum_{\substack{p \\ \eta(p) \leq x^\delta}} 1 = \sum_{r=2}^{[x^\delta]} \sum_{\substack{p \\ \eta(p)=r}} 1 = \sum_{r=2}^{[x^\delta]} E(r) < 2 + \ln 2 \sum_{r=3}^{[x^\delta]} \frac{r}{\ln r} < 2 + \ln 2 \int_3^{1+[x^\delta]} \frac{t dt}{\ln t}. \quad (3)$$

Nun gilt für  $3 \leq a < b$  jedenfalls

$$2 \left(1 - \frac{1}{2 \ln a}\right) \int_a^b \frac{t dt}{\ln t} \leq 2 \int_a^b \left(1 - \frac{1}{2 \ln t}\right) \frac{t dt}{\ln t} = \frac{t^2}{\ln t} \Big|_a^b < \frac{b^2}{\ln b}. \quad (4)$$

Ist  $0 < \delta < 1/2$  und setzen wir in (4):  $a = 3$ ,  $b = 1 + [x^\delta]$ , so zeigt sich, dass das Integral in (3) ein  $O(x^{2\delta}/\ln x)$  und also ein  $o(x/\ln x)$  ist. Im Fall  $\delta = 1/2$  muss man mehr

Sorgfalt walten lassen und das Integral in (3) auftrennen, etwa in  $\int_3^{x^{1/4}} + \int_{x^{1/4}}^{1+[x^{1/2}]}$ ; dann ist

$$\int_3^{x^{1/4}} \frac{t dt}{\ln t} < \frac{4 x^{1/4}}{\ln x} x^{1/4} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right). \quad (5)$$

Zur Abschätzung des andern Integrals setzt man in (4)  $a = x^{1/4}$ ,  $b = 1 + [x^{1/2}]$  und erhält

$$\int_{x^{1/4}}^{1+[x^{1/2}]} \frac{t dt}{\ln t} < \frac{1}{2 \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)} \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\frac{1}{2} \ln x} = \frac{x}{\ln x} (1 + o(1)). \quad (6)$$

Denkt man sich noch (5) und (6) in (3) eingetragen, so folgt aus (2) die Behauptung über  $A(x, 1/2)$ .  
P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

**Aufgabe 619.** Let  $k$  be an integer larger than 1,  $p_n$  the  $n$ th prime,  $\varphi(m)$  the number of positive integers less than  $m$  which are relatively prime to  $m$ ,  $\sigma(m)$  the sum of the divisors of  $m$ , and  $\zeta$  the Riemann Zeta function. Prove the following:

$$\zeta(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_1 \times \dots \times p_n)^k}{\varphi(p_1 \times \dots \times p_n) \times \sigma[(p_1 \times \dots \times p_n)^{k-1}]}$$

R. E. Atalla, Athens, Ohio, USA

*Lösung:* Bezeichnen wir den unter dem lim-Zeichen stehenden Ausdruck mit  $z(k; n)$ , so folgt aus der Multiplikativität der beiden Funktionen  $\varphi$  und  $\sigma$ :

$$z(k; n) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i^{-k})^{-1}. \tag{*}$$

Aus der für alle komplexen  $s$  mit  $Re\ s > 1$  gültigen Eulerschen Identität

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-s})^{-1}$$

und aus (\*) folgt die Behauptung sofort.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

**Aufgabe 621.** Démontrer d'une façon élémentaire en deux lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de deux façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires. Démontrer d'une façon élémentaire en trois lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de trois façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires.

W. Sierpiński †, Varsovie

*Erster Beweis:* Für natürliche  $n$  setzen wir  $t(n) = (1/2) n (n + 1)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x \equiv 1 \pmod{5} &\Rightarrow t\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) = t\left(\frac{x^2 + x - 2}{2}\right) + t(x) \\ &= t\left(\frac{3x^2 + 3x - 6}{10}\right) + t\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{5}\right). \end{aligned}$$

*Zweiter Beweis:* Mit  $t(n)$  wie oben hat man

$$\begin{aligned} x \equiv 71 \pmod{85} &\Rightarrow t\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) = t\left(\frac{x^2 + x - 2}{2}\right) + t(x) \\ &= t\left(\frac{3x^2 + 3x - 6}{10}\right) + t\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{5}\right) \\ &= t\left(\frac{15x^2 + 15x - 10}{34}\right) + t\left(\frac{4x^2 + 4x + 3}{17}\right). \end{aligned}$$

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Eine weitere Lösung sandte P. Bundschuh (Freiburg i. Br.).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. November 1971**, wenn möglich in Maschinenschrift.

**Aufgabe 642.** Am ebenen Dreieck mit Seiten  $abc$ , Inradius  $r$ , Umradius  $R$  und Flächeninhalt  $rs$  beweise man die Verschärfung

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 + k [rs\sqrt{3} + (4-2\sqrt{3})r(R-2r)] \leq \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & \text{für } k=4 \\ (a+b+c)^2/2 & \text{für } k=6 \end{cases}$$

zweier Ungleichungen von H. Hadwiger, JBer. DMV 49, 2. Abt. S. 35–39.

I. Paasche, München

**Aufgabe 643.** Man beweise, dass für  $n \geq 2$  die Ebene durch ein vollständiges  $n$ -Eck in allgemeiner Lage in

$$\frac{1}{8} \cdot (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8)$$

Gebiete zerlegt wird.

A. Dreiding und P. Hohler, Zürich

**Aufgabe 644.** Im Dreieck  $ABC$  sei  $\beta \leq \gamma$ , wobei  $B$  bzw.  $C$  den Scheitel von  $\beta$  bzw.  $\gamma$  bezeichnet. Wählt man  $X \in \overline{AB}$  und  $Y \in \overline{AC}$  so, dass  $\sphericalangle XCB = \lambda \gamma$  und  $\sphericalangle YBC = \lambda \beta$  mit  $0 < \lambda \leq 1$ , so gilt  $CX \leq BY$  mit Gleichheit genau für  $\beta = \gamma$ . Man beweise diese Behauptung.

P. Erdős, Budapest

**Aufgabe 645.** Let  $p$  be a fixed prime and  $a, b, s, k$  nonnegative integers. Let  $E(a, b)$  denote the largest value of  $k$  such that  $p^k \mid \binom{a+b}{a}$  and let  $E'(a, b)$  denote the largest value of  $k$  such that

$$p^k \mid (a+b+1) \binom{a+b}{a}.$$

Show that

$$E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) = s, \quad (*)$$

provided

$$0 \leq a < p^s; \quad 0 \leq b < p^s.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

**Problem 645 A.** Find three complex integers  $x, y, z$  and a rational integer  $n > 1$  which satisfy the equation (1)  $x^p + y^p = n z^p$  for every prime  $p > 3$ , where  $z > 1$  and  $n$  is not a perfect  $p$ th power. Note that for  $n = 1$  (1) has the solutions

$$x = 1 + i\sqrt{3}, \quad y = 1 - i\sqrt{3}, \quad z = 2.$$

[Amer. Math. Monthly 50, 641 (1943)].

The problem is classified as an unsolved problem.

J. M. Gandhi, Western Illinois University, USA