Zu Formeln von Fejes Tóth und Hoppe für den Inhalt sphärischer Tetraeder

Autor(en): **Weissbach, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 5

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28070

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REFERENCES

[1] Cf. C. F. GAUSS, *Summatio quarundam serierum singularium*, Werke v. 2, especially p. 16–17.
[2] See e.g. G. PÓLYA, *Mathematical discovery* (Wiley, 1962), v. 1, p. 68–75, or the German translation, *Vom Lösen mathematischer Aufgaben* (Birkhäuser, 1966), v. 1, p. 110–119. Also French, Japanese and Hungarian translations available.
[3] G. PÓLYA, *J. Combinatorial Theory*, v. 6, 1969, p. 102–105; see p. 105.
[4] See e.g. M. G. KENDALL and A. STUART, *The advanced theory of statistics* (London, 1961), v. 2, p. 494.
[5] G. PÓLYA, *Proceedings of the Second Chapel Hill Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications* (1970), p. 381–384, from which, with the kind permission of the Organizing Committee, extensive passages of Sections 4 and 5 are extracted.
[6] LEONHARD EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum* (Lausanne, 1748), v. 1, p. 253–275 (De Partitione Numerorum) or *Opera Omnia*, ser. 1, v. 8, p. 313–338. There are several modern expositions; the reader can find what is needed in the sequel with relatively little trouble in John Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley, 1958), p. 107–123, and especially p. 153, Problem 5.
[7] See, e.g., M. G. KENDALL and A. STUART, l.c.[4]), p. 479. Also E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2nd ed. (Leipzig & Berlin, 1927), p. 94–97.

Zu Formeln von Fejes Tóth und Hoppe für den Inhalt sphärischer Tetraeder

FEJES TÓTH [2] gab 1956 eine Formel für den Inhalt jener sphärischen Tetraeder an, die SCHLÄFLI [5] Orthoscheme genannt hat. An anderem Ort bemerkt FEJES TÓTH [3], dass es ihm nicht gelungen ist, die Identität dieser Formel mit einer gleichwertigen von HOPPE [4] aus dem Jahre 1882 auf direktem Wege nachzuweisen. Wie man mit einfachen Mitteln beide Formeln ineinander überführen kann, soll nachstehend gezeigt werden.

Bezeichnet man den Inhalt des Orthoschems im dreidimensionalen sphärischen Raum der Krümmung $+1$ mit $S^{(4)}$, so ist nach HOPPE

$$2\,S^{(4)} = \int_{\delta}^{\beta_1} \phi(\psi)\,d\psi\,; \qquad \frac{\tan^2\phi}{\tan^2\beta_3\,\sin^2\beta_2} + \frac{\tan^2\psi}{\tan^2\beta_2} = 1 \tag{1}$$

$$\sin\delta = \sin\beta_2\cos\beta_1$$

und nach FEJES TÓTH

$$2\,S^{(4)} = \int_0^{\alpha_1} \left[S_1^{(2)} - \phi^*(\psi)\arctan\frac{\tan S_1^{(2)}}{\phi^*(\psi)}\right] d\psi \tag{2}$$

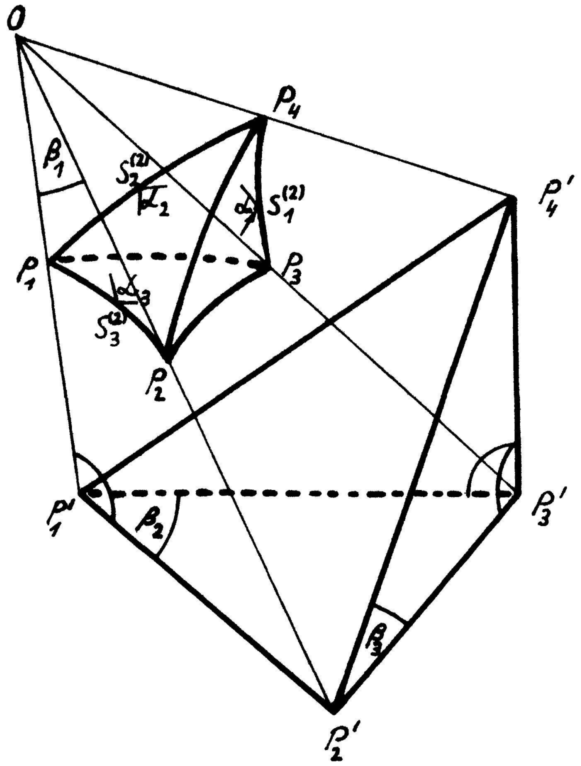
mit:

$$(\phi^*)^2 = \frac{\cos^2\alpha_2\cos^2\psi}{\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\sin^2\psi} \tag{2*}$$

$$\tan^2 S_1^{(2)} = \tan^2 S_1^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_3}.$$

Zur Erläuterung der auftretenden Grössen möge die Abbildung dienen.

Der dreidimensionale sphärische Raum wird als Kugelfläche in einen vierdimensionalen euklidischen Raum eingebettet. Aus dem Mittelpunkt der Kugel wird das Orthoschem auf einen dreidimensionalen, zum Strahl OP_1 normalen, euklidischen Unterraum projiziert. Bei HOPPE sind β_2 und β_3 Winkel zwischen Kanten des Bildtetraeders, β_1 ein Winkel zwischen Projektionsstrahlen. In der Formel von FEJES TÓTH



sind mit α_i die von $\pi/2$ verschiedenen Winkel zwischen den Wänden des Orthoschems bzw. den projizierenden Unterräumen bezeichnet. $S_i^{(2)}$ist die zum Winkel α_i gehörende Kante des Orthoschems. Vorausgesetzt wird $0 < \beta_i < \pi/2$ $(i = 1, 2, 3)$ oder, damit gleichwertig $0 < \alpha_i < \pi/2$. Hierin liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit: Ist $\pi/2 < \alpha_h < \pi$, so lässt sich das Orthoschem in Teilorthoscheme zerlegen, deren Winkel den Forderungen genügen. Für $\alpha_h = 0, \pi/2$ oder π kann $S^{(4)}$ sofort angegeben werden (SCHLÄFLI [6]). Unter den angeführten Voraussetzungen sind die Winkel α_i und β_i über

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 \sin\beta_2\,, \quad \cos\alpha_2 = \cos\beta_2 \sin\beta_3\,, \quad \cos\alpha_3 = \cos\beta_3 \tag{3}$$

verbunden. Werden in (1) die Winkel α_i als Bestimmungsstücke eingeführt, so ergibt sich

$$2\,S^{(4)} = \int\limits_{\varrho}^{\alpha_1} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\,d\psi\,, \qquad \sin\varrho = \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_3}\,. \tag{4}$$

(Man vergleiche auch BÖHM [1]).

Um aus (4) auf direktem Wege (2) herzuleiten, oder umgekehrt, betrachte man die Funktion

$$\begin{aligned} F(\varphi, \psi) &= \frac{\partial}{\partial\varphi} \arcsin\left(\frac{\sin\varphi \sin\psi}{\cos\alpha_2}\right) \frac{\partial}{\partial\psi}\, S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= \frac{\cos\varphi \sin\psi \cos^2\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\psi}{(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\varphi \sin^2\psi)^{1/2}\, (\sin^2\psi \sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2)^{1/2}\, (\sin^2\psi - \cos^2\alpha_2)} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(\varrho < \psi \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right).$$

Wird

$$(\sin^2\psi \sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2)\cos^2\varphi \mathrel{\overset{\cdot}{=}} u(\varphi, \psi)\,, \quad (\cos^2\alpha_2 - \sin^2\varphi \sin^2\psi)\cos^2\alpha_3 \mathrel{\overset{\cdot}{=}} v(\varphi, \psi)$$

gesetzt, so ist, wie leicht nachweisbar

$$F(\varphi, \psi) = \frac{\frac{1}{2}\left[u \frac{\partial v}{\partial \psi} - v \frac{\partial u}{\partial \psi}\right]}{u^{1/2} v^{1/2} [u + v]} = \frac{\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{u}{v}\right]^{1/2}}{1 + \frac{u}{v}}$$

folglich:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} F(\varphi, \psi)\, d\varphi = \psi \frac{\partial}{\partial \psi} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\,; \qquad \left(\varrho < \psi \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

$$\int\limits_\varrho^{\alpha_1} F(\varphi, \psi)\, d\psi = \arctan \left[\frac{u(\varphi, \alpha_1)}{v(\varphi, \alpha_1)}\right]^{1/2}; \qquad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right). \tag{6*}$$

Ausgehend von (4) gewinnt man durch Teilintegration, da $S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)$ für $\psi = \varrho$ verschwindet:

$$2\, S^{(4)} - \alpha_1 S_1^{(2)} = - \int\limits_\varrho^{\alpha_1} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\, d\psi = - \int\limits_\varrho^{\alpha_1} d\psi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} F(\varphi, \psi)\, d\varphi\,.$$

Austausch der Integrationen bringt mit (6*)

$$2\, S^{(4)} = \alpha_1 S_1^{(2)} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} \arctan \left[\frac{\sin\alpha_1 \cos\varphi \tan S_1^{(2)}}{(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1 \sin^2\varphi)^{1/2}}\right] d\varphi\,. \tag{7}$$

Hier hat man nur noch $\sin\alpha_1 \sin\varphi = \cos\alpha_2 \sin\psi$ zu setzen, um die Formel von Fejes Tóth zu gewinnen. – Man findet $F(\varphi, \psi)$ beim Versuch, für (2) die Schläflische Differentialformel

$$\frac{\partial S^{(4)}}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} S_i^{(2)}$$

zu bestätigen.

B. Weissbach, Magdeburg

LITERATUR

[1] J. Böhm, *Untersuchung des Simplexinhalts in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimensionen*, J. für reine und angew. Math. *202*, 16–51 (1959).
[2] L. Fejes Tóth, *On the Volume of a Polyhedron in Non-Eudidean Spaces*, Publ. Math. *4*, 256–261.
[3] L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren* (Leipzig 1965).
[4] R. Hoppe, *Berechnung einiger vierdehniger Winkel*, Arch. Math. Phys. *67*, 269–290 (1882).
[5] L. Schläfli, *Gesammelte math. Abhandlungen 1* (*Theorie der vielfachen Kontinuität, aus dem Jahre 1852*) (Basel 1950), S. 227ff.
[6] L. Schläfli, *Gesammelte math. Abhandlungen 2* (*Über eine Funktion von drei Winkeln, aus dem Jahre 1854*) (Basel 1953), S. 156–163.