Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Antwort auf eine Frage von P. Erdös nach fünf Punkten mit ganzzahligen Abständen

Herr Professor Erdös fragt (z. B. in [7]): Gibt es fünf Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden und keine vier auf einem Kreis liegen, und deren Entfernungen voneinander alle ganzzahlig sind? – Bekannt ist, dass bei einer unendlichen Punktmenge mit ganzzahligen Distanzen alle Punkte auf einer Geraden liegen müssen [1, 2, 3]. Für jedes n wurden andererseits n Punkte mit ganzzahligen Abständen so konstruiert, dass keine drei auf einer Geraden, aber mindestens $n-1$ auf einem Kreis liegen [4, 5, 6]. – Hier soll eine Klasse von nicht zueinander ähnlichen Fünfecken angegeben werden, die den gefragten Bedingungen genügen.

Mit noch zu wählenden Winkeln α und β werden die Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, mit den Koordinaten

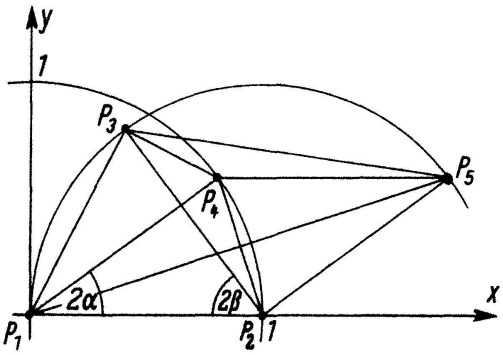
$$x_1 = y_1 = y_2 = 0;\ x_2 = 1;\ x_4 = x_5 - 1 = \cos 2\alpha;\ y_4 = y_5 = \sin 2\alpha;$$
$$x_3 = 1 - \cos 2\beta;\ y_3 = \sin 2\beta \tag{1}$$

betrachtet. P_1, P_2, P_4 und P_5 bilden die Eckpunkte eines Rhombus mit der Seitenlänge 1. P_2 und P_4 bzw. P_1, P_3 und P_5 liegen auf den Einheitskreisen um P_1 bzw. um P_2. Dann sind die folgenden fünf Entfernungen gleich der Einheit

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_4) = d(P_2, P_3) = d(P_2, P_5) = d(P_4, P_5) = 1\,. \tag{2}$$

Weitere vier Abstände ergeben sich zu

$$d(P_1, P_3) = 2\sin\beta;\ d(P_1, P_5) = 2\cos\alpha;$$
$$d(P_2, P_4) = 2\sin\alpha;\ d(P_3, P_5) = 2\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \tag{3}$$



und sind rational, falls die trigonometrischen Funktionen der Winkel α und β rational sind. Dies wird erreicht, wenn α und β für beliebige rationale Werte ξ und η so bestimmt werden, dass die Beziehungen

$$\sin\alpha = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\ ;\ \cos\alpha = \frac{2\,\xi}{\xi^2 + 1}\ ;\ \sin\beta = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\ ;\ \cos\beta = \frac{2\,\eta}{\eta^2 + 1} \tag{4}$$

erfüllt sind.

Von den zehn möglichen Abständen bleibt nun nur noch die Rationalität von $d = d(P_3, P_4)$ fraglich. Es gilt

$$d^2 = (\cos 2\alpha + \cos 2\beta - 1)^2 + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2 = 1 - 8\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta)\,, \tag{5}$$

und mit (4) folgt

$$d^2 - 1 = 8\,\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\,\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\,\frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\,\xi\,\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}\,. \tag{6}$$

Hieraus ergeben sich mit $\zeta \neq 0$ die beiden Gleichungen

$$d + 1 = \frac{8}{\zeta}\,\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}\,\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \quad \text{und} \quad d - 1 = \zeta\,\frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\,\xi\,\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}\,, \tag{7}$$

aus denen durch Addition d rational bestimmt ist, wenn die durch Subtraktion entstehende diophantische Gleichung

$$2\,\zeta\,(\xi^2+1)\,(\eta^2+1) = (8-\zeta^2)\,(\xi^2-1)\,(\eta^2-1) + 4\,\zeta^2\,\xi\,\eta \tag{8}$$

in rationalen Zahlen ξ, η, ζ gelöst werden kann.

Mit dem auszuschliessenden Wert $\eta = 1$ (P_1, P_2, P_3 wären kollinear) und mit einem rationalen Parameter q gilt (8) für

$$\xi = q \quad \text{und} \quad \zeta = q + 1/q\,. \tag{9}$$

Ebenfalls mit (9) besitzt (8) für η noch die zweite, nicht triviale Lösung

$$\eta = -\frac{F(-q)}{F(q)}\,, \qquad F(q) = q^6 + 2\,q^5 - 7\,q^4 + 4\,q^3 + 7\,q^2 + 2\,q - 1\,. \tag{10}$$

Werden nun (9) und (10) über (4) in (1) eingesetzt, so ergeben sich die Koordinaten

$$\begin{gathered} x_1 = y_1 = y_2 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_4 = x_5 - 1 = \frac{6\,q^2 - q^4 - 1}{(q^2+1)^2}\,; \\ y_4 = y_5 = \frac{4\,q\,(q^2-1)}{(q^2+1)^2}\,; \quad x_3 = \frac{32\,q^2\,(q^2-1)^2\,(q^2+1)^4\,(q^4-6\,q^2+1)^2}{\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)^2 + 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}^2}\,; \\ y_3 = \frac{8\,q\,(q^2-1)\,(q^2+1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)\,\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,q^2+1)^2 - 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}}{\{(q^2-1)^2\,(q^4-6\,\dot{q}^2+1)^2 + 4\,q^2\,(q^2+1)^4\}^2}\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Ersetzt man in (11) q durch $-q$ oder durch $1/q$, so erhält man die an der x-Achse gespiegelten Punktmengen.

Die Punkte P_1, P_2, P_4, P_5 sind nur kollinear, wenn $q = 0$ oder $q = \pm 1$ gewählt wird; sie liegen genau dann auf einem Kreis, wenn $x_4 = 0$ gilt, was aber für rationales q nicht möglich ist. Da P_3 immer auf dem Einheitskreis um P_2 liegt, lassen sich die Fälle, in denen P_3 mit zwei bzw. drei der übrigen Punkte auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis liegt, zu den folgenden Bedingungen für x_3 aus (11) zusammenfassen

$$x_3 = 0,\ 2,\ q^2,\ 2-q^2,\ \frac{2\,(q^4-6\,q^2+1)^2}{(q^2+1)^4},\ \frac{8\,q^2}{(q^2+1)^2},\ \frac{2\,(q^2-1)^2}{(q^2+1)^2}\,. \tag{12}$$

Schliesst man nun von den endlich vielen Lösungen der durch (12) bestimmten Polynome in q die eventuell rationalen Werte aus, so stellen die mit ihrem Hauptnenner multiplizierten Koordinaten aus (11) für jedes andere $q > 1$ fünf Punkte der gewünschten Art dar.

Als Beispiel ergibt $q = 3$ die Punkte $Q_1 = (0, 0)$; $Q_2 = (5^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 0)$; $Q_3 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2, -2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 103)$; $Q_4 = (-7 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$; $Q_5 = (2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2,\ 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$ mit den Abständen $d(Q_1, Q_2) = d(Q_1, Q_4) = d(Q_2, Q_3) = d(Q_2, Q_5) = d(Q_4, Q_5) = 1\,026\,882\,025$; $d(Q_1, Q_3) = 1\,365\,890\,000$; $d(Q_1, Q_5) = 1\,232\,258\,430$; $d(Q_2, Q_4) = 1\,643\,011\,240$; $d(Q_3, Q_4) = 2\,318\,936\,425$; $d(Q_3, Q_5) = 2\,007\,491\,070$.

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 996 (1945).
[2] A. DELACHET, *Contemporary Geometry* (Dover, New York 1962), S. 28–29.
[3] E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, 59–60 (1951).
[4] M. ALTWEGG, *Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *7*, 56–58 (1952).
[5] A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. *8*, 37–38 (1953).
[6] F. STEIGER, *Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *8*, 66–67 (1953).
[7] *Problem Session of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, Calgary (Canada). June 1969.

Eine Verallgemeinerung der Cesàro-Rekursion

Ein Satz aus dem Jahre 1949 möge hier mit dem damaligen Beweis mitgeteilt werden: *Gegeben sind 2 unbestimmte Folgen $a\,b\,c\ldots$ und $A\,B\,C\ldots$. Das wie folgt gebildete Matrizenprodukt ihrer beliebig weit fortgesetzten Teilsummenschemata enthält in jeder Diagonale von links oben nach rechts unten lauter gleiche Elemente:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c\cdots m \\ a & a+b & a+b+c\cdots \; . \\ a & 2a+b & 3a+2b+c\cdots \; . \\ . & . & \cdots \; . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & M \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & 3A+2B+C & A+B+C & C \\ . & 2A+B & A+B & B \\ . & A & A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & T & . & . \\ R & S & T & . \\ . & R & S & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Nach der Umbenennung $a\,b\,c\ldots m = a_0\,a_1\,a_2\ldots a_n$ nebst $A\,B\,C\ldots M = A_0\,A_1\,A_2\ldots A_n$ handelt es sich um das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} . & \cdots & . \\ \binom{i+0}{0} a_0 & \cdots & \binom{i+n}{n} a_0 + \cdots + \binom{i+0}{0} a_n \\ . & \cdots & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & \binom{k+n}{n} A_0 + \cdots + \binom{k+0}{0} A_n & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & \binom{k+0}{0} A_0 & . \end{pmatrix}.$$

Im linken Faktor zählt $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$ von oben nach unten; im rechten Faktor zählt $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$ von rechts nach links. Das innere Produkt der notierten Zeile i und Spalte k kann als Cauchy-Produkt entwickelt werden:

$$a_0\,A_0 \left[\binom{i+0}{0}\binom{k+n}{n} + \cdots + \binom{i+n}{n}\binom{k+0}{0}\right] + \cdots + (a_0\,A_n + \cdots + a_n\,A_0)$$
$$\times \left[\binom{i+0}{0}\binom{k+0}{0}\right] = a_0\,A_0 \binom{i+k+1+n}{n} + \cdots + (a_0\,A_n + \cdots + a_n\,A_0)$$
$$\times \binom{i+k+1+0}{0}.$$

Die Abhängigkeit nur von der Summe $i + k$, nicht aber noch einzeln von i und k, zeigt die behauptete Konstanz jeder Diagonale der Produktmatrix. – Die benutzte Beziehung

$$\sum_{\substack{\lambda,\mu=0 \\ \lambda+\mu=\nu}}^{\nu} \binom{i+\lambda}{\lambda}\binom{k+\mu}{\mu} = \binom{i+k+1+\nu}{\nu} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich bei x^ν aus $(1-x)^{-i-1}(1-x)^{-k-1} = (1-x)^{-i-k-2}$, nämlich aus

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{i+\lambda}{\lambda} x^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} x^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{i+k+1+\nu}{\nu} x^\nu.$$

Die Cesàro-Rekursion (Knopp, Unendliche Reihen, 4. Aufl., S. 483) ist der Spezialfall $a\,b\,c\ldots = 1\;0\;0\ldots$, wobei die Hauptdiagonale $S\;S\;S$ der Produktmatrix betrachtet wird.

I. Paasche, München