

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 5

PDF erstellt am: **26.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Kleine Mitteilungen

### Antwort auf eine Frage von P. Erdős nach fünf Punkten mit ganzzahligen Abständen

Herr Professor ERDÖS fragt (z. B. in [7]): Gibt es fünf Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden und keine vier auf einem Kreis liegen, und deren Entfernungen voneinander alle ganzzahlig sind? – Bekannt ist, dass bei einer unendlichen Punktmenge mit ganzzahligen Distanzen alle Punkte auf einer Geraden liegen müssen [1, 2, 3]. Für jedes  $n$  wurden andererseits  $n$  Punkte mit ganzzahligen Abständen so konstruiert, dass keine drei auf einer Geraden, aber mindestens  $n - 1$  auf einem Kreis liegen [4, 5, 6]. – Hier soll eine Klasse von nicht zueinander ähnlichen Fünfecken angegeben werden, die den gefragten Bedingungen genügen.

Mit noch zu wählenden Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  werden die Punkte  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , mit den Koordinaten

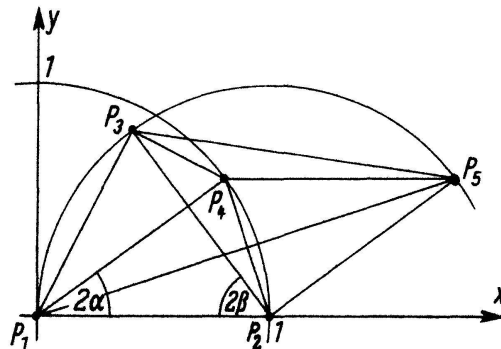
$$\begin{aligned} x_1 = y_1 = y_2 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_4 = x_5 - 1 = \cos 2\alpha; \quad y_4 = y_5 = \sin 2\alpha; \\ x_3 = 1 - \cos 2\beta; \quad y_3 = \sin 2\beta \end{aligned} \quad (1)$$

betrachtet.  $P_1, P_2, P_4$  und  $P_5$  bilden die Eckpunkte eines Rhombus mit der Seitenlänge 1.  $P_2$  und  $P_4$  bzw.  $P_1, P_3$  und  $P_5$  liegen auf den Einheitskreisen um  $P_1$  bzw. um  $P_2$ . Dann sind die folgenden fünf Entfernungen gleich der Einheit

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_4) = d(P_2, P_3) = d(P_2, P_5) = d(P_4, P_5) = 1. \quad (2)$$

Weitere vier Abstände ergeben sich zu

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) = 2 \sin \beta; \quad d(P_1, P_5) = 2 \cos \alpha; \\ d(P_2, P_4) = 2 \sin \alpha; \quad d(P_3, P_5) = 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned} \quad (3)$$



und sind rational, falls die trigonometrischen Funktionen der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  rational sind. Dies wird erreicht, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  für beliebige rationale Werte  $\xi$  und  $\eta$  so bestimmt werden, dass die Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}; \quad \cos \alpha = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1}; \quad \sin \beta = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}; \quad \cos \beta = \frac{2\eta}{\eta^2 + 1} \quad (4)$$

erfüllt sind.

Von den zehn möglichen Abständen bleibt nun nur noch die Rationalität von  $d = d(P_3, P_4)$  fraglich. Es gilt

$$d^2 = (\cos 2\alpha + \cos 2\beta - 1)^2 + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)^2 = 1 - 8 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta), \quad (5)$$

und mit (4) folgt

$$d^2 - 1 = 8 \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\xi\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}. \quad (6)$$

Hieraus ergeben sich mit  $\zeta \neq 0$  die beiden Gleichungen

$$d + 1 = \frac{8}{\zeta} \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \quad \text{und} \quad d - 1 = \zeta \frac{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) - 4\xi\eta}{(\xi^2 + 1)(\eta^2 + 1)}, \quad (7)$$

aus denen durch Addition  $d$  rational bestimmt ist, wenn die durch Subtraktion entstehende diophantische Gleichung

$$2 \zeta (\xi^2 + 1) (\eta^2 + 1) = (8 - \zeta^2) (\xi^2 - 1) (\eta^2 - 1) + 4 \zeta^2 \xi \eta \quad (8)$$

in rationalen Zahlen  $\xi, \eta, \zeta$  gelöst werden kann.

Mit dem auszuschliessenden Wert  $\eta = 1$  ( $P_1, P_2, P_3$  wären kollinear) und mit einem rationalen Parameter  $q$  gilt (8) für

$$\xi = q \quad \text{und} \quad \zeta = q + 1/q. \quad (9)$$

Ebenfalls mit (9) besitzt (8) für  $\eta$  noch die zweite, nicht triviale Lösung

$$\eta = -\frac{F(-q)}{F(q)}, \quad F(q) = q^6 + 2q^5 - 7q^4 + 4q^3 + 7q^2 + 2q - 1. \quad (10)$$

Werden nun (9) und (10) über (4) in (1) eingesetzt, so ergeben sich die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 = y_2 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_4 = x_5 - 1 &= \frac{6q^2 - q^4 - 1}{(q^2 + 1)^2}; \\ y_4 = y_5 &= \frac{4q(q^2 - 1)}{(q^2 + 1)^2}; \quad x_3 = \frac{32q^2(q^2 - 1)^2(q^2 + 1)^4(q^4 - 6q^2 + 1)^2}{\{(q^2 - 1)^2(q^4 - 6q^2 + 1)^2 + 4q^2(q^2 + 1)^4\}^2}; \quad (11) \\ y_3 &= \frac{8q(q^2 - 1)(q^2 + 1)^2(q^4 - 6q^2 + 1)\{(q^2 - 1)^2(q^4 - 6q^2 + 1)^2 - 4q^2(q^2 + 1)^4\}}{\{(q^2 - 1)^2(q^4 - 6q^2 + 1)^2 + 4q^2(q^2 + 1)^4\}^2}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in (11)  $q$  durch  $-q$  oder durch  $1/q$ , so erhält man die an der  $x$ -Achse gespiegelten Punktmengen.

Die Punkte  $P_1, P_2, P_4, P_5$  sind nur kollinear, wenn  $q = 0$  oder  $q = \pm 1$  gewählt wird; sie liegen genau dann auf einem Kreis, wenn  $x_4 = 0$  gilt, was aber für rationales  $q$  nicht möglich ist. Da  $P_3$  immer auf dem Einheitskreis um  $P_2$  liegt, lassen sich die Fälle, in denen  $P_3$  mit zwei bzw. drei der übrigen Punkte auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis liegt, zu den folgenden Bedingungen für  $x_3$  aus (11) zusammenfassen

$$x_3 = 0, 2, q^2, 2 - q^2, \frac{2(q^4 - 6q^2 + 1)^2}{(q^2 + 1)^4}, \frac{8q^2}{(q^2 + 1)^2}, \frac{2(q^2 - 1)^2}{(q^2 + 1)^2}. \quad (12)$$

Schliesst man nun von den endlich vielen Lösungen der durch (12) bestimmten Polynome in  $q$  die eventuell rationalen Werte aus, so stellen die mit ihrem Hauptnenner multiplizierten Koordinaten aus (11) für jedes andere  $q > 1$  fünf Punkte der gewünschten Art dar.

Als Beispiel ergibt  $q = 3$  die Punkte  $Q_1 = (0, 0)$ ;  $Q_2 = (5^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 0)$ ;  $Q_3 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2, -2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 103)$ ;  $Q_4 = (-7 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$ ;  $Q_5 = (2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2)$  mit den Abständen  $d(Q_1, Q_2) = d(Q_1, Q_4) = d(Q_2, Q_3) = d(Q_2, Q_5) = d(Q_4, Q_5) = 1\,026\,882\,025$ ;  $d(Q_1, Q_3) = 1\,365\,890\,000$ ;  $d(Q_1, Q_5) = 1\,232\,258\,430$ ;  $d(Q_2, Q_4) = 1\,643\,011\,240$ ;  $d(Q_3, Q_4) = 2\,318\,936\,425$ ;  $d(Q_3, Q_5) = 2\,007\,491\,070$ .

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. 51, 996 (1945).
- [2] A. DELACHET, *Contemporary Geometry* (Dover, New York 1962), S. 28–29.
- [3] E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. 6, 59–60 (1951).
- [4] M. ALTWEGG, *Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. 7, 56–58 (1952).
- [5] A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. 8, 37–38 (1953).
- [6] F. STEIGER, *Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. 8, 66–67 (1953).
- [7] *Problem Session of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, Calgary (Canada). June 1969.

**Eine Verallgemeinerung der Cesàro-Rekursion**

Ein Satz aus dem Jahre 1949 möge hier mit dem damaligen Beweis mitgeteilt werden: Gegeben sind 2 unbestimmte Folgen  $a b c \dots$  und  $A B C \dots$ . Das wie folgt gebildete Matrizenprodukt ihrer beliebig weit fortgesetzten Teilsummenschemata enthält in jeder Diagonale von links oben nach rechts unten lauter gleiche Elemente:

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ a & b & & & \\ a & a+b & & & \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & & & & M \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3A+2B+C & A+B+C & C & C \\ \cdot & 2A+B & A+B & B & B \\ \cdot & A & A & A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & T & \cdot & \cdot \\ R & S & T & \cdot \\ \cdot & R & S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Beispiel:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

Beweis: Nach der Umbenennung  $a b c \dots m = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$  nebst  $A B C \dots M = A_0 A_1 A_2 \dots A_n$  handelt es sich um das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{i+0}{0} a_0 & \dots & \binom{i+n}{n} a_0 + \dots + \binom{i+0}{0} a_n \\ \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \binom{k+n}{n} A_0 + \dots + \binom{k+0}{0} A_n & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \binom{k+0}{0} A_0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Im linken Faktor zählt  $i = -1, 0, 1, 2, \dots$  von oben nach unten; im rechten Faktor zählt  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$  von rechts nach links. Das innere Produkt der notierten Zeile  $i$  und Spalte  $k$  kann als Cauchy-Produkt entwickelt werden:

$$\begin{aligned} & a_0 A_0 \left[ \binom{i+0}{0} \binom{k+n}{n} + \dots + \binom{i+n}{n} \binom{k+0}{0} \right] + \dots + (a_0 A_n + \dots + a_n A_0) \\ & \times \left[ \binom{i+0}{0} \binom{k+0}{0} \right] = a_0 A_0 \binom{i+k+1+n}{n} + \dots + (a_0 A_n + \dots + a_n A_0) \\ & \times \binom{i+k+1+0}{0}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit nur von der Summe  $i + k$ , nicht aber noch einzeln von  $i$  und  $k$ , zeigt die behauptete Konstanz jeder Diagonale der Produktmatrix. – Die benutzte Beziehung

$$\sum_{\substack{\lambda, \mu=0 \\ \lambda+\mu=v}}^v \binom{i+\lambda}{\lambda} \binom{k+\mu}{\mu} = \binom{i+k+1+v}{v} \text{ für } v = 0, 1, \dots, n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich bei  $x^v$  aus  $(1-x)^{-i-1} (1-x)^{-k-1} = (1-x)^{-i-k-2}$ , nämlich aus

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{i+\lambda}{\lambda} x^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} x^\mu = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{i+k+1+v}{v} x^v.$$

Die Cesàro-Rekursion (KNOPP, Unendliche Reihen, 4. Aufl., S. 483) ist der Spezialfall  $a b c \dots = 1 0 0 \dots$ , wobei die Hauptdiagonale  $S S S$  der Produktmatrix betrachtet wird.

I. PAASCHE, München