Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 5

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 630. Eine Ebene schneide einen geraden Kreiskegel in einer Ellipse. Es bezeichnen α den halben Öffnungswinkel des Kegels und p, q die Abstände der Kegelspitze von den Hauptscheiteln der Ellipse. Man beweise, dass für den Flächeninhalt F des Mantelstückes zwischen Kegelspitze und Schnittellipse gilt:

$$F = \pi \frac{p+q}{2} \sqrt{p\,q} \sin\alpha .$$

G. Pólya, Stanford, California, USA

Lösung: Es bezeichnen M den Mittelpunkt der Schnittellipse E und F' den Flächeninhalt der Normalprojektion E' von E (und damit des Mantelstückes mit Flächeninhalt F) auf eine zur Kegelachse normale Ebene. Für die Hauptachsenlängen a, b von E' gilt dann $2\,a = (p+q)\sin\alpha$ und – nach dem Höhensatz, angewendet in der den Punkt M enthaltenden Normalebene zur Kegelachse –

$$b = \sqrt{\frac{2\,p\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\frac{2\,q\cdot\sin\alpha}{2}} = \sqrt{p\,q}\cdot\sin\alpha .$$

Wegen $F = F'/\sin\alpha = \pi\,ab/\sin\alpha$ ergibt sich hieraus unmittelbar die Behauptung.

C. Bindschedler, Küsnacht/ZH

Weitere Lösungen sandten R. Abend (Gelnhausen, BRD), G. Bach (Braunschweig), J. Féher (Pécs, Ungarn), H. Flanders (Tel Aviv), K. Grün (Linz), H. Kappus (Bottmingen/BL), E. Karst (Tucson, Arizona, USA), L. Kieffer (Luxembourg), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

Anmerkung der Redaktion: I. Paasche weist darauf hin, dass die Behauptung in G. Holzmüller, Elemente der Stereometrie II, Leipzig 1900, Seite 179, Formel (3), bewiesen wird.

Aufgabe 631. Es seien p eine ungerade Primzahl und α eine beliebige natürliche Zahl. Man beweise

$$\prod_{k=1}^{p^{\alpha-1}} (k\,p-1) \equiv -1 \pmod{p^\alpha} .$$

J. Féher, Pécs, Ungarn

Lösung: Es sei U die Gruppe der Einheiten im Ring $Z/(p^\alpha)$. Da p ungerade ist, so ist U bekanntlich zyklisch. Demnach hat die Gleichung $x^2 = 1$ nur zwei Lösungen in U, nämlich $x = +1$ und $x = -1 = p^\alpha - 1$. Definiert man $G = \{kp \pm 1 \mid 1 \le k \le p^{\alpha-1}\}$, $H = \{kp + 1 \mid 1 \le k \le p^{\alpha-1}\}$, so ist H eine Untergruppe von G und G eine Untergruppe von U mit $|U| = \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ und $|G| = 2\,|H| = 2\,p^{\alpha-1}$. Jedem x in G werde nun x^{-1} zugeordnet. Da $x = x^{-1}$ nur für $x = \pm 1$ gilt, haben wir $\prod_{x\in G} x = -1$ und $\prod_{x\in H} x = +1$. Daraus ergibt sich $\prod_{k=1}^{p^{\alpha-1}} (kp-1) = \prod_{x\in G \setminus H} x = (-1)/(+1) = -1$.

H. Flanders, Tel Aviv

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht/ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), N. Haak (Braunschweig), H. Harborth (Braunschweig), R. Segal (Princeton, N.J., USA), E. Teuffel (Korntal/Stuttgart) und R. W. van der Waall (Nijmegen, Niederlande).

Anmerkung der Redaktion: L. Carlitz leitet die Behauptung her aus dem Hilfssatz (p. 64) in S. Lubelski, Zur Theorie der höheren Kongruenzen, Journal f. d. reine angew. Math. 162 (1930), 63–68. E. Teuffel zitiert P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie I, Leipzig 1902, Seiten 174/175.

Aufgabe 632. A, B und C seien drei verschiedene Punkte einer gegebenen Parabel. Man zeige, dass sich die Parabelnormalen in A, B, C genau dann in einem Punkt treffen, wenn der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auf der Parabelachse liegt.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung: Ein cartesisches Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Parabel durch die Gleichung $y^2 = px$ $(p \neq 0)$ beschrieben wird. $A(a^2/p, a)$, $B(b^2/p, b)$ und $C(c^2/p, c)$ seien verschiedene Punkte der Parabel, so dass also $a \neq b \neq c \neq a$ gilt. Die Gleichung der Parabelnormalen n_A in A ist

$$2\,ax + py = \frac{2\,a^3}{p} + pa\,,$$

und die Normalen n_B und n_C haben analoge Gleichungen. Bezeichnen x_1 bzw. x_2 die Abszissen der Schnittpunkte von n_A und n_B bzw. n_B und n_C, so gilt

$$x_1 = \frac{a^2 + ab + b^2}{p} + \frac{p}{2}\,, \quad x_2 = \frac{b^2 + bc + c^2}{p} + \frac{p}{2}\,.$$

Hieraus folgt: $x_1 = x_2 \Longleftrightarrow a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 \Longleftrightarrow a^2 - c^2 = b\,(c - a) \Longleftrightarrow a + c = -\,b \Longleftrightarrow (a + b + c)/3 = 0$, d. h. die Parabelnormalen in A, B, C treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auf der Parabelachse liegt.

H. Meyer, Birkerød, Dänemark

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig), C. Bindschedler (Küsnacht/ZH), J. Fehér (Pécs, Ungarn), K. Fladt (Calw, BRD), H. Flanders (Tel Aviv), H. Frischknecht (Berneck/SG), K. Grün (Linz), P. Hohler (Dietikon/ZH), H. Kappus (Bottmingen/BL), L. Kieffer (Luxembourg), J. van Leeuwen (Utrecht), M. Milivoj (Zagreb), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), K. Schuler (Rottweil, BRD) und Ch. Vuille (La Sagne/NE).

Anmerkung der Redaktion: H. Siller (Hofstra University, Hempstead, Long Island, New York) weist darauf hin, dass diese Aufgabe auch gefunden werden kann in S. L. Loney, Elements of Coordinate Geometry, Part I, Macmillan London 1953, p. 214, Ex. 8.

Aufgabe 633. Es sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer T_0-Raum derart, dass es zu je zwei Punkten x, y von X einem Homöomorphismus f von X auf sich selbst mit $f(x) = y$ gibt. Es bezeichne $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle der Teilmenge A von X. Man beweise oder widerlege: Aus $x, y \in X$ und $x \in \overline{\{y\}}$ folgt $y \in \overline{\{x\}}$.

J. Rätz, Bern

Lösung: Das folgende Gegenbeispiel dient zur Widerlegung. Es seien X die Menge der reellen Zahlen und $\{\phi, X, (-\infty, x]; x \in X\}$ das System der $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Mengen. Offenbar ist $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein T_0-Raum und $\overline{\{x\}} = (-\infty, x]$ für jedes $x \in X$. Für jedes feste $a \in X$ ist die durch $t_a(x) = x + a$ $[x \in X]$ definierte Abbildung $t_a: X \to X$ ein Homöomorphismus. Damit hat $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ die in den Voraussetzungen geforderten Eigenschaften. Für $x, y \in X$ gilt jedoch $x \in \overline{\{y\}}$ genau dann, wenn $x \leq y$ ist, womit gezeigt ist, dass $x \in \overline{\{y\}}$ die Beziehung $y \in \overline{\{x\}}$ nicht impliziert. Th. Rychener, Bern

Eine weitere Lösung sandte A. Bager (Hjørring, Dänemark).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10.Mai 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 654. Man beweise die Richtigkeit der Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+r} = n! \sum_{1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_r \leq n} k_1 k_2 \cdots k_r \quad (k_i \in N)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $r = 0, 1, 2, \ldots$ (für $r = 0$ habe die rechts stehende Summe den Wert 1). O. Reutter, Ochsenhausen

Aufgabe 655. Man setze $\binom{n}{k} = n_k$ und $n_0 + n_4 + n_8 + \ldots = a_n$, $n_1 + n_5 + n_9 + \ldots = b_n$, $n_2 + n_6 + n_{10} + \ldots = c_n$, $n_3 + n_7 + n_{11} + \ldots = d_n$. Nun beweise man $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 = 4^{n-1} + 2^{n-1}$ für jede natürliche Zahl n. I. Paasche, München

Aufgabe 656. Es bezeichnen n eine natürliche Zahl ≥ 2 und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen. Man beweise: Ist $A_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (a_{ik})$ die $n \times n$-Matrix mit $a_{ik} = \sin(\alpha_{max\{i,k\}} - \alpha_{min\{i,k\}})$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, so gilt

$$\operatorname{Det} A_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i),$$

wobei $\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \pi$. W. Fischer, Bielefeld

Aufgabe 657. Es seien $m_A, m_B, m_C > 0$ die Massen dreier nichtkollinearer Massenpunkte A, B, C in der Ebene E. Wie liegen A, B, C in E und in welchem Verhältnis stehen m_A, m_B, m_C zueinander, wenn der Schwerpunkt von A, B, C

a) im Umkreismittelpunkt U, b) im Höhenschnittpunkt H,

c) im Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC liegt? R. Rose, Biel