Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 6

Artikel: Zur ebenen hyperbolischen Kinematik
Autor: Frank, Hubert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28071

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 26 Heft 6 Seiten 121-144 10. November 1971

Zur ebenen hyperbolischen Kinematik

Herrn Professor Dr. G. Bol zum 65. Geburtstag gewidmet

R. Garnier behandelt in seinen Cours de Cinematique III (siehe [4]) die ebenen hyperbolischen Bewegungen. Hier soll erneut eine Darstellung dieses Gegenstandes gegeben werden, die den differentialgeometrischen Aspekt stärker berücksichtigt. Dabei wird ein handlicher Kalkül entwickelt, der es gestatten soll, Fragen höherer Differentiationsordnung in übersichtlicher Weise zu behandeln. Dementsprechend werden ausser den bei Garnier zu findenden Ergebnissen eine Reihe weiterer angegeben.

Wir gehen vom projektiven Modell der hyperbolischen Ebene aus. Mit jeder eigentlichen Polbahn einer hyperbolischen Bewegung, die den absoluten Masskegelschnitt nicht treffen soll, ist ein bewegliches Koordinatendreieck invariant verknüpft. Auf diese Schar von Basisdreiecken wird die Darstellung der hyperbolischen Bewegung bezogen. Dann folgen durch einfache Betrachtungen in §1 und §2 die bekannten Eigenschaften einer hyperbolischen Bewegung.

In §3 werden erste Eigenschaften von Bahnkurven und von Hüllkurven der Bahngeradenscharen abgeleitet. Insbesondere wird der Ort der Wendepunkte von Bahnkurven untersucht, der von demjenigen in der euklidischen Kinematik sehr verschieden ist.

Bei der Behandlung der Frage nach den Krümmungsmittelpunkten der Bahnkurven werden wir wie in der euklidischen Kinematik auf quadratische Cremonatransformationen geführt. Wir erhalten dann den Satz von Bobillier und einen für die Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte einfacheren Projektionssatz. Zum Schluss werden noch der Ort der Scheitelpunkte von Bahnkurven, die sogenannte Kreispunktkurve und die dazugehörige Mittelpunktkurve betrachtet.

§ 1 Hyperbolische Kurventheorie.

Die Punkte einer reellen projektiven Ebene E können wir durch Koordinatentripel beschreiben, die wir zu Vektoren

$$\mathfrak{p} = (p_0, p_1, p_2) \tag{1}$$

zusammenfassen. In der Ebene E sei ein nichtentarteter nichtnullteiliger Kegelschnitt K durch die Gleichung

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\, p_i\, p_k = 0\,, \quad a_{ik} = a_{ki}\,^{1)} \tag{2}$$

gegeben, die wir uns durch die Forderung

$$|a_{ik}| = 1 \tag{3}$$

an die Determinante eindeutig normiert denken.

Wir können K als absoluten Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie auffassen. Für die Punkte im Innengebiet von K ist dann $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle > 0$, für diejenigen im Aussengebiet ist $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \rangle < 0$.

Dementsprechend werden wir im folgenden zwei Fälle unterscheiden, die wir parallel zueinander behandeln werden. Zu einem Kurvenstück

$\mathfrak{r}(t)$, das ganz im Innengebiet von K liegt, gehört nach [2] ein begleitendes Polardreieck $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ mit der Produkttabelle:

$\langle . \rangle$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{n}$
$\mathfrak{r}$	1	0	0
$\mathfrak{t}$	0	-1	0
$\mathfrak{n}$	0	0	-1

Die Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ sind dabei bis auf das Vorzeichen fest normiert.

$\mathfrak{r}(t)$, das ganz im Aussengebiet von K liegt, gehört nach [2] ein begleitendes Polardreieck $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ mit der Produkttabelle:

$\langle . \rangle$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{p}_2$
$\mathfrak{r}$	-1	0	0
$\mathfrak{p}_1$	0	0	1/2
$\mathfrak{p}_2$	0	1/2	0

(4)

Dann sind noch die Basistransformationen:

$$\hat{\mathfrak{r}} = \pm \mathfrak{r}\,, \; \hat{\mathfrak{p}}_1 = k\, \mathfrak{p}_1\,, \; \hat{\mathfrak{p}}_2 = k^{-1}\, \mathfrak{p}_2$$

mit $k' = 0$ möglich.

Für diese Basisvektoren gelten Ableitungsgleichungen der Form:

$$\mathfrak{r}' = \alpha\, \mathfrak{t}$$
$$\mathfrak{t}' = \alpha\, \mathfrak{r} + \varkappa\, \mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{n}' = -\varkappa\, \mathfrak{t}$$

$$\mathfrak{r}' = 2\,\omega_2\, \mathfrak{p}_1 + 2\,\omega_1\, \mathfrak{p}_2$$
$$\mathfrak{p}_1' = \omega_1\, \mathfrak{r} \tag{5}$$
$$\mathfrak{p}_2' = \omega_2\, \mathfrak{r}$$

Weiterhin erhalten wir aus $\mathfrak{r}' = \alpha\, \mathfrak{t}$ mit $\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \rangle = \varepsilon$ und $\varepsilon = \pm 1$:

$$\alpha^2 = \varepsilon\, 4\, \omega_1\, \omega_2\,.$$

---

1) Es werden die Bezeichnungen aus Bol [3] benutzt. Für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ist $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} p_i q_k$.
$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \rangle = 0$ bedeutet, dass die Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ in Bezug auf K konjugiert liegen.

Demnach ist $\mathfrak{t}$ genau dann innerer Punkt von K, wenn ω_1 und ω_2 gleiches Vorzeichen aufweisen. Ist

$$\omega_1 = 0\,, \quad \omega_2 \neq 0\,, \tag{6}$$

so hat die Kurve eine isotrope Tangente. Für

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \tag{7}$$

Für

$$\alpha = 0$$

entartet die Kurve in einen festen Punkt.

Zu einer Kurve $\mathfrak{r}(t)$, die nicht in einen Punkt entartet und keine isotrope Tangente besitzt, lässt sich ein invarianter Kurvenparameter definieren durch:

$$s = \int \alpha\,. \qquad\qquad s = 2\int \sqrt{|\omega_1\,\omega_2|}\,. \tag{8}$$

Den Parameter s nennen wir die *hyperbolische Bogenlänge* der Kurve[2]), die durch (8) bis auf das Vorzeichen und eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Als *hyperbolische Krümmung*[2]) können wir die absolute Invariante

$$\varrho = \frac{\varkappa}{\alpha} \qquad\qquad \varrho = \frac{1}{2\sqrt{|\omega_1\,\omega_2|}}\,(A_2 - A_1) \tag{9}$$

mit $A_i = 1/2\,(\ln\omega_i)'$

bezeichnen. Dann heisst der Punkt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \varrho\,\mathfrak{r} \tag{10}$$

hyperbolischer Krümmungsmittelpunkt der Kurve,

wobei

$$\mathfrak{n} = -\frac{\omega_2}{\sqrt{|\omega_1\,\omega_2|}}\,\mathfrak{p}_1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{|\omega_1\,\omega_2|}}\,\mathfrak{p}_2$$

ist.

§ 2. Hyperbolische Bewegungen

Unter einer ebenen hyperbolischen Transformation verstehen wir eine projektive Abbildung der Ebene E auf sich, bei welcher der absolute Kegelschnitt K in sich übergeht. Eine einparametrige Schar hyperbolischer Transformationen nennen wir eine *hyperbolische Bewegung*. In einer Basis lässt sich eine solche Bewegung als einparametrige Schar von Matrizen $B(t)$ darstellen, die wir so normieren können, dass gilt:

$$\langle B\,\bar{\mathfrak{y}},\, B\,\bar{\mathfrak{y}}\rangle = \langle \bar{\mathfrak{y}},\, \bar{\mathfrak{y}}\rangle\,. \tag{12}$$

Die Darstellung der hyperbolischen Bewegung ist dann bis auf das Vorzeichen fest normiert.

---

[2]) Siehe Bol [2]!

Differenzieren wir

$$\mathfrak{y} = B\,\bar{\mathfrak{y}}\,, \tag{13}$$

so erhalten wir:

$$\mathfrak{y}' = C\,\mathfrak{y} + B\,\bar{\mathfrak{y}}' \tag{14}$$

mit

$$B' = C\,B\,. \tag{15}$$

Zu jeder hyperbolischen Bewegung gibt es daher eine Schar von Abbildungen $C(t)$ mit der Eigenschaft:

$$\langle \mathfrak{y}, C\,\mathfrak{y}\rangle = 0\,. \tag{16}$$

Die letzte Bedingung folgt aus der Differentiation von (12).

Zu einer Matrizenschar $C(t)$ gehört aber auch eine hyperbolische Bewegung, wenn sie die Bedingung (16) erfüllt, da dann der absolute Kegelschnitt festbleibt. Durch $C = 0$ sind die konstanten Bewegungen gekennzeichnet, die wir von der Betrachtung ausschliessen wollen.

Wir können uns die Punkte $\bar{\mathfrak{y}}$ einer Ebene $\bar{E}$ zugeschrieben denken, die gegen eine feste Ebene E derart bewegt wird, dass die in E und $\bar{E}$ festen Kegelschnitte K bzw. $\bar{K}$ immer zur Deckung kommen. Ist $\bar{\mathfrak{y}}$ ein fester Punkt in $\bar{E}$, den wir immer in der normierten Form

$$\bar{\mathfrak{y}}' = \mathfrak{o} \quad \text{mit} \quad \langle \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{y}}\rangle = \pm 1 \tag{17}$$

vorgeben können, so stellt

$$\mathfrak{y}(t) = B(t)\,\bar{\mathfrak{y}}\,, \qquad \bar{\mathfrak{y}}' = \mathfrak{o} \tag{18}$$

eine parametrisierte Kurve der festen Ebene E dar. Diese Kurve nennen wir *Bahnkurve* der hyperbolischen Bewegung.

Für eine Bahnkurve gilt nach (14):

$$\mathfrak{y}' = C\,\mathfrak{y}\,. \tag{19}$$

Die Matrix $C(t)$ definiert demnach für jeden Parameterwert t eine Abbildung, die jedem Bahnkurvenpunkt einen Punkt seiner Bahntangente zuordnet. Nach (16) ist die Normierung der Bewegung so gewählt, dass der Bahntangentenpunkt $\mathfrak{y}'$ immer zum Bahnkurvenpunkt $\mathfrak{y}$ konjugiert in Bezug auf K liegt.

Ein Punkt $\mathfrak{r}$ in E heisst *momentaner Fixpunkt oder Pol* der hyperbolischen Bewegung an der Parameterstelle t, wenn die durch ihn hindurchgehende Bahnkurve stationär ist. Die momentanen Fixpunkte sind daher gekennzeichnet durch

$$C\,\mathfrak{r} = \lambda\,\mathfrak{r}\,. \tag{20}$$

Auf einem geeigneten Parameterintervall werden sich die momentanen Fixpunkte $\mathfrak{r}(t)$ zu einer Kurve zusammenschliessen, die wir *Polbahn* der hyperbolischen Bewegung nennen. Im folgenden wollen wir eine Polbahn immer als glattes Kurvenstück voraussetzen.

Jeder Polbahn $\mathfrak{r}(t)$ in E kann in eindeutiger Weise eine Polbahn $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ in $\bar{E}$ zugeordnet werden durch:

$$\mathfrak{r}(t) = B(t)\,\bar{\mathfrak{r}}(t)\,. \tag{21}$$

Für die Geraden einer hyperbolischen Ebene können wir eine Dualbasis durch die Produkttabelle einführen:

	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{P}_2$	$\mathfrak{P}_3$
$\mathfrak{p}_1$	$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 \rangle$
$\mathfrak{p}_2$	$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \rangle$
$\mathfrak{p}_3$	$\langle \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \rangle$	$\langle \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_3 \rangle$

(22)

wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ eine Basis für die Darstellung der Punkte von E ist. Dann ist die Polare zum Punkt $\mathfrak{p} = p_1\,\mathfrak{p}_1 + p_2\,\mathfrak{p}_2 + p_3\,\mathfrak{p}_3$ in Bezug auf K die Gerade $\mathfrak{P} = p_1\,\mathfrak{P}_1 + p_2\,\mathfrak{P}_2 + p_3\,\mathfrak{P}_3$[3]).

Das Inzidenzprodukt des Punktes $\mathfrak{q}$ und der Geraden $\mathfrak{P}$ ist nun:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{P} = \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{p} \rangle = \langle \mathfrak{Q}, \mathfrak{P} \rangle\,. \tag{23}$$

Wegen der Erhaltung der Inzidenz induziert eine hyperbolische Bewegung in der Dualebene der Geraden eine duale Bewegung. Diese duale Bewegung ist wegen (22) und (23) gleich der vorgegebenen. Insbesondere ist die Polare eines momentanen Fixpunktes in bezug auf K eine momentane Fixgerade.

Existiert daher ein momentaner Fixpunkt, der nicht auf dem absoluten Kegelschnitt K liegt, so gibt es zwei weitere voneinander verschiedene uneigentliche Fixpunkte auf K, die reell oder konjugiert komplex sind. Liegen alle momentanen Fixpunkte auf K, so gibt es genau einen Fixpunkt, und die Tangente in diesem an K ist momentane Fixgerade. Diesen letzten Fall bezeichnen wir wie in der euklidischen Kinematik als Fernpolstellung.

Schliessen wir für das Folgende die Fernpolstellung von der Betrachtung aus, so sind die zwei Fälle zu behandeln:

Die eigentliche Polbahn $\mathfrak{r}(t)$ einer hyperbolischen Bewegung liegt ganz im Innern von K.	Die eigentliche Polbahn $\mathfrak{r}(t)$ einer hyperbolischen Bewegung liegt ganz im Äußeren von K.

Zu der Polkurve $\mathfrak{r}(t)$ gehört dann ein bewegliches Dreieck (4) mit den Ableitungsgleichungen (5). Verwenden wir dieses als Bezugssystem in der Ebene E, so hat die Matrix C aus (15) wegen (16) die Gestalt:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \tag{24}$$

[3]) Definieren wir für zwei Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ noch ein Vektorprodukt so, dass $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ der Pol der Geraden $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ in bezug auf K ist, dann erhalten wir einen handlichen Kalkül für die Behandlung der hyperbolischen Bewegungen. Ein solches Vektorprodukt wird bereits von R. Garnier in [4] und M. Barner in [1] benutzt.

In den Ebenen E und $\bar{E}$ seien die durch gleiche Parameterwerte aufeinander bezogene Kurven $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ und $\mathfrak{r}(t)$ gegeben, die beide im

Inneren von K bzw. $\bar{K}$[4])	Äußeren von K bzw. $\bar{K}$[4])

liegen mögen. Wir untersuchen nun die Frage, wann $\mathfrak{r}(t)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ zueinander gehörige Polbahnen einer hyperbolischen Bewegung sind.

Nach (21) können wir den Ansatz machen:

$$\mathfrak{r}(t) = B(t)\,\bar{\mathfrak{r}}(t)\,. \tag{25}$$

Differenzieren wir diese Gleichung und beachten die Beziehungen (5), (15), (24), (12) und (4), so erhalten wir die Bedingungen:

$$\alpha = \bar{\alpha}^{5)} \qquad \Big| \qquad \omega_1\,\omega_2 = \bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_2{}^{5)} \tag{26}$$

und

$$\gamma = \varkappa - \bar{\varkappa} \qquad \Big| \qquad \sigma = (\ln\mu)' \tag{27}$$

$$\text{mit } \mu = \frac{\omega_1}{\bar{\omega}_1} = \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}$$

und die Darstellung der hyperbolischen Bewegung:

$$B\,\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} \qquad \Big| \qquad B\,\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$$

$$B\,\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} \qquad \Big| \qquad B\,\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mu\,\mathfrak{p}_1,\ \mu = \frac{\omega_1}{\bar{\omega}_1} = \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}\,. \tag{28}$$

$$B\,\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \qquad \Big| \qquad B\,\bar{\mathfrak{p}}_2 = \mu^{-1}\,\mathfrak{p}_2\,.$$

Die Bedingung (26) ist aber auch hinreichend dafür, dass zu zwei parameterweise aufeinander bezogenen Kurven eine eindeutig bestimmte hyperbolische Bewegung existiert, so dass diese Kurven als Polkurvenpaar auftreten. Für zwei Kurven in gleicher Lage bezüglich K lässt sich durch eine Parametertransformation[6]) die Bedingung (26) immer

erreichen.	erreichen, wenn die Halbinvarianten[6]) $\omega_1\,\omega_2$ und $\bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_2$ gleiches Vorzeichen haben, d.h. wenn auch die Kurventangenten in Bezug auf K gleichartig liegen.

Zu zwei ebenen Kurven ist stets eine hyperbolische Bewegung (bis auf die Parameterverteilung) eindeutig bestimmt, wenn die beiden Kurven und ihre Tangenten in bezug auf den Masskegelschnitt K gleichartig liegen.

---

[4]) Nur solche Kurven kommen als Polkurvenpaar in Frage, da eine hyperbolische Bewegung das Innere bzw. das Äussere von K invariant lässt.

[5]) Die mit $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ verbundenen Basisvektoren und Grössen sind mit Querstrichen zu versehen.

[6]) Das Transformationsverhalten ist in Bol [2], §1 angegeben.

Nach (26) und (28) gilt:

Bei einer hyperbolischen Bewegung rollen die eigentlichen Polbahnen gleitungslos (d.h. längentreu) aufeinander ab.

Den Zusammenhang zwischen den hyperbolischen Krümmungen ϱ und $\bar{\varrho}$ der Polbahnen und den Grössen der hyperbolischen Bewegung finden wir aus (9) und (27):

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \varrho - \bar{\varrho} \quad \Big| \quad \frac{\sigma}{2\sqrt{|\omega_1 \omega_2|}} = \varrho - \bar{\varrho}\,. \tag{29}$$

Durch

$$\gamma = 0 \quad \Big| \quad \sigma = 0 \tag{30}$$

sind die konstanten Bewegungen gekennzeichnet. Daher erhalten wir aus (29) für $\bar{\varrho} = 0$ den bekannten Satz (siehe [5], §6):

Eine ebene hyperbolische Kurve ist durch Vorgabe ihrer hyperbolischen Krümmung als Funktion der hyperbolischen Bogenlänge bis auf ihre Lage eindeutig bestimmt.

Gilt:

$$\alpha = 0\,, \quad \Big| \quad \omega_1 = \omega_2 = 0\,, \tag{31}$$

so entartet nach (5) die Polbahn in einen festen Punkt. Die hyperbolische Bewegung ist eine hyperbolische Drehung, wobei in der Matrix C aus (24) eine beliebige Funktion auftritt.

§ 3. Eigenschaften von Bahnkurven

Für eine Bahnkurve $\mathfrak{p}(t)$ gilt nach (19) und (24):

$$\mathfrak{p}' = \gamma\,(-p_2\,\mathfrak{t} + p_1\,\mathfrak{n})^{7)}\,. \quad \Big| \quad \mathfrak{p}' = \sigma\,(p_1\,\mathfrak{p}_1 - p_2\,\mathfrak{p}_2)^{7)}\,. \tag{32}$$

Bezeichnen wir die durch (22) definierte Dualbasis mit

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{T}, \mathfrak{N}\,, \quad \Big| \quad \mathfrak{X}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2\,, \tag{33}$$

so ist die Polare zu $\mathfrak{p}'$ in bezug auf K:

$$-p_2\,\mathfrak{T} + p_1\,\mathfrak{N}\,. \quad \Big| \quad p_1\,\mathfrak{P}_1 - p_2\,\mathfrak{P}_2\,. \tag{34}$$

Diese Gerade ist hyperbolisch senkrecht[8]) zur Bahntangente und geht durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$.

Die Bahnkurvennormalen treffen den eigentlichen momentanen Fixpunkt.

---

[7]) Mit dem Vektorprodukt aus [3]) lautet (32):
$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \wedge (\gamma\,\mathfrak{r})\,. \,\Big|\, \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \wedge (\sigma\,\mathfrak{r})\,.$
Die hier definierten Fixpunkte sind also mit denen in [4] identisch.

[8]) Zwei Geraden heissen hyperbolisch senkrecht, wenn sie in bezug auf K konjugiert liegen. Nach (23) bedeutet dies, dass der Pol der einen Geraden bezüglich K die zweite Gerade trifft.

Höhere Ableitungen der Bahnkurvenpunkte $\mathfrak{p}(t)$ erhalten wir aus (32) durch Differenzieren, wenn wir dabei die Rastbedingungen in $\bar{E}$ beachten:

$$\begin{aligned} p_0' - \lambda p_0 &= -\alpha p_1 \\ p_1' - \lambda p_1 &= -\alpha p_0 + \bar{\varkappa} p_2 \\ p_2' - \lambda p_2 &= -\bar{\varkappa} p_1 . \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_0' - \lambda p_0 &= -\bar{\omega}_1 p_1 - \bar{\omega}_2 p_2 \\ p_1' - \lambda p_1 &= -2\bar{\omega}_2 p_0 \\ p_2' - \lambda p_2 &= -2\bar{\omega}_1 p_0 . \end{aligned} \tag{35}$$

Für einen Wendepunkt $\mathfrak{p}$ einer Bahnkurve muss $\det(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'') = 0$ gelten. Daraus erhalten wir als Ort der Wendepunkte von Bahnkurven an der Parameterstelle t eine Kurve dritter Ordnung mit der Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \gamma p_0 (p_1^2 + p_2^2) \\ & + \alpha (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2) p_2 . \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta = {} & (p_1 p_2 - p_0^2)(-\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2) \\ & + \sigma p_0 p_1 p_2 . \end{aligned} \tag{36}$$

Diese Kurve Δ wird *Wendepunktskurve* genannt.

Für eine momentane Drehung zerfällt Δ in die drei momentanen Fixgeraden.

Ausserdem zerfällt Δ in einen Kegelschnitt und die Polbahntangente, falls diese isotrop ist.

Die Wendepunktskurve Δ berührt die eigentliche Polbahn und durchsetzt den absoluten Kegelschnitt K in den uneigentlichen Fixpunkten dreipunktig.

Δ hat keine reellen Schnittpunkte mit K und besitzt keinen singulären Punkt. Die Wendepunktskurve Δ besteht demnach aus zwei Zweigen, von denen der paare (d.h. das Oval) im Innern von K liegt.

Δ hat genau dann einen singulären Punkt, und zwar einen isolierten Doppelpunkt, wenn

$$\tau = \sigma^2 - 16\,\omega_1 \omega_2 = 0$$

ist. Nach §1 schneidet in diesem Fall die Polbahntangente den absoluten Kegelschnitt K in reellen Punkten. Der isolierte Doppelpunkt

$$\mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{r} + 4\,\omega_2 \mathfrak{p}_1 - 4\,\omega_1 \mathfrak{p}_2$$

liegt im Aussengebiet von K. Seine Polare bezüglich K ist die Inflexionsachse von Δ.

Für $\tau > 0$ hat Δ zwei reelle Zweige, wobei der unpaare Zweig die eigentliche Polbahn berührt und K in den uneigentlichen Fixpunkten durchsetzt. Für $\tau < 0$ ist Δ eine einteilige Kurve dritter Ordnung.

Unter den Hüllkurven von Bahngeradenscharen – das sind Geradenscharen in E, die durch feste Geraden von $\bar{E}$ erzeugt werden – gibt es solche, die für einen Parameterwert t Spitzen aufweisen. Der Ort dieser Spitzen ist die Wendepunktskurve $\bar{\Delta}$ der inversen Bewegung[9]):

$$\bar{\Delta} = -\gamma\, p_0\, (p_1^2 + p_2^2) + \alpha\, (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2)\, p_2\,, \qquad \bar{\Delta} = (p_1\, p_2 - p_0^2)\, (-\omega_1\, p_1 + \omega_2\, p_2) - \sigma\, p_0\, p_1\, p_2\,, \tag{37}$$

die wir *Spitzenkurve* nennen. Die Spitzenkurve hat die gleichen Eigenschaften wie die Wendepunktskurve.

Die beiden Kurven Δ und $\bar{\Delta}$ dritter Ordnung durchsetzen einander in den uneigentlichen Fixpunkten dreipunktig und berühren sich im eigentlichen Pol. Weiterhin schneiden sie sich auf der momentanen Fixgeraden $\mathfrak{X}$ in

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{t}\,. \qquad \mathfrak{w} = \omega_2\, \mathfrak{p}_1 + \omega_1\, \mathfrak{p}_2\,. \tag{38}$$

Dieser Punkt liegt ausserdem auf der Polbahntangente. Nach dem Bézoutschen Satz ist $\mathfrak{w}$ der einzige von den momentanen Fixpunkten verschiedene Schnittpunkt von Δ und $\bar{\Delta}$.

$\mathfrak{w}$ ist für beide Kurven Δ und $\bar{\Delta}$ Wendepunkt. Die zu $\mathfrak{w}$ gehörige harmonische Polare in bezug auf Δ bzw. $\bar{\Delta}$ ist die Polbahnnormale.

Die Wendetangenten in $\mathfrak{w}$ an Δ:

$$\gamma\, \mathfrak{X} + \alpha\, \mathfrak{N} \qquad \sigma\, \mathfrak{X} - 2\, \omega_2\, \mathfrak{P}_1 + 2\, \omega_1\, \mathfrak{P}_2 \tag{39}$$

und an $\bar{\Delta}$:

$$-\gamma\, \mathfrak{X} + \alpha\, \mathfrak{N} \qquad -\sigma\, \mathfrak{X} - 2\, \omega_2\, \mathfrak{P}_1 + 2\, \omega_1\, \mathfrak{P}_2 \tag{40}$$

liegen harmonisch zur momentanen Fixgeraden $\mathfrak{X}$ und der Polbahntangente.

Die Wendepunktskurve Δ und die Spitzenkurve $\bar{\Delta}$ sind spiegelbildlich (im hyperbolischen Sinn) bezüglich der Polbahntangente und in bezug auf den eigentlichen momentanen Fixpunkt.

§ 4. Cremonatransformation, Satz von Bobillier, Kreispunktkurve

Die Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{q}(t)$ einer Bahnkurve $\mathfrak{p}(t)$ sind die Hüllkurvenpunkte der Schar der Bahnkurvennormalen (siehe [2]). Die Normale einer Bahnkurve $\mathfrak{p}(t)$ geht für jeden Parameterwert t durch den momentanen Fixpunkt $\mathfrak{r}(t)$. Sie wird daher durch die Gleichung in $\mathfrak{q}$ beschrieben:

$$p_2\, q_1 - p_1\, q_2 = 0\,. \tag{41}$$

Differenzieren wir (41) und beachten dabei die Rastbedingungen (35) in $\bar{E}$ für $\mathfrak{p}$ und die entsprechenden Rastbedingungen in E für $\mathfrak{q}$ (d.h. in (35) sind die Querstriche

[9]) Dieses Ergebnis können wir der projektiven Kinematik in der Ebene entnehmen, da die hyperbolischen Bewegungen spezielle projektive sind. Siehe hierzu die Dissertation des Verfassers, «Ebene projektive Kinematik», Karlsruhe 1968.

wegzulassen), so erhalten wir als weitere Bedingung für den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned} &\alpha\,(p_2\,q_0 - p_0\,q_2) \\ &\quad -\gamma\,(p_1\,q_1 + p_2\,q_2) = 0\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2\,\omega_1\,(p_0\,q_1 - p_1\,q_0) \\ &\quad +2\,\omega_2\,(p_2\,q_0 - p_0\,q_2) \\ &\quad +\sigma\,(p_1\,q_2 + p_2\,q_1) = 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Daraus erhalten wir zusammen mit (41) für die lokalen Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $\mathfrak{q}$ zum Bahnkurvenpunkt $\mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha\,p_0\,p_2 + \gamma\,(p_1^2 + p_2^2) \\ q_1 &= \alpha\,p_1\,p_2 \\ q_2 &= \alpha\,p_2^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_0 &= p_0\,(-\omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2) - \sigma\,p_1\,p_2 \\ q_1 &= p_1\,(-\omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2) \\ q_2 &= p_2\,(-\omega_1\,p_1 + \omega_2\,p_2) \end{aligned} \tag{43}$$

Auf jeder Geraden durch den eigentlichen Fixpunkt wird demnach durch eine hyperbolische Bewegung eine quadratische Cremonatransformation induziert, die jedem Bahnkurvenpunkt ihren Krümmungsmittelpunkt zuordnet.

Da bei der Zuordnung (43) die Wendepunktskurve in die Spitzenkurve abgebildet wird, gilt:

Die hyperbolischen Krümmungsmittelpunkte derjenigen Bahnkurven, die Wendepunkte durchlaufen, liegen auf der Spitzenkurve. (44)

Dabei geschieht die Abbildung von Δ auf $\bar{\Delta}$ gemäss (43) derart, dass diejenigen Punkte auf einer Geraden durch $\mathfrak{r}$ ineinander übergeführt werden, die nicht spiegelbildlich in bezug auf $\mathfrak{r}$ liegen. Die Paare zueinandergehöriger Punkte $\mathfrak{p} \in \Delta$ und $\mathfrak{q} \in \bar{\Delta}$ werden daher durch den absoluten Kegelschnitt K getrennt.

Die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen in E und $\bar{E}$ bilden ein Paar zugeordneter Punkte bei der Cremonatransformation (43).

Wir betrachten auf zwei verschiedenen Geraden durch den Fixpunkt $\mathfrak{r}$, von denen keine auf die Polbahntangente fallen soll, je ein Paar zugeordneter Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\hat{\mathfrak{p}}$, $\hat{\mathfrak{q}}$. Dem Büschel der beiden Verbindungsgeraden $(\mathfrak{p}, \hat{\mathfrak{p}})$ und $(\mathfrak{q}, \hat{\mathfrak{q}})$ gehört dann die Gerade:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (p_1\,\hat{p}_2 + p_2\,\hat{p}_1)\,\mathfrak{T} \\ &\quad - (p_1\,\hat{p}_1 - p_2\,\hat{p}_2)\,\mathfrak{N} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= -\omega_1\,p_1\,\hat{p}_1\,\mathfrak{P}_1 \\ &\quad +\omega_2\,p_2\,\hat{p}_2\,\mathfrak{P}_2 \end{aligned} \tag{45}$$

an. $\mathfrak{L}$ hängt aber nur von der Wahl der beiden Geraden durch $\mathfrak{r}$ und nicht von der Wahl der auf ihnen durch (43) definierten Punktepaare ab. Dies ist gerade die Aussage des *Satzes von Bobillier:*

Die Verbindungsgerade von zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{p}$ und $\hat{\mathfrak{p}}$, die auf verschiedenen Geraden durch den eigentlichen Fixpunkt liegen, schneidet die Verbindungsgerade der gemäss (43) zugeordneten Punkte $\mathfrak{q}$ und $\hat{\mathfrak{q}}$ immer auf einer Achse, die nur von der Wahl der Geraden durch den Fixpunkt abhängt.

Fällt eine der beiden Geraden durch $\mathfrak{r}$ mit der Polbahnnormalen zusammen, so wird $\mathfrak{L}$ in (45) die hyperbolische Senkrechte zur anderen Geraden. Wegen (44) folgt daraus der *Projektionssatz:*

Die Paare zugeordneter Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *auf einer Geraden durch den eigentlichen Fixpunkt sind die Projektionen der Polbahnkrümmungsmittelpunkte* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ *aus den Punkten der hyperbolischen Senkrechten zur Geraden* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$.

Differenzieren wir (42) wieder unter Beachtung der Rastbedingungen in E und $\bar{E}$ für $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{p}$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die stationären Krümmungsmittelpunkte, d.h. für die Scheitel der Bahnkurven. Zusammen mit (43) finden wir daraus den Ort der Scheitel, auch *Kreispunktkurve* genannt, mit der Gleichung:

$$\Omega = [(\varkappa - 2\gamma)\, p_1 + (\ln\gamma/\alpha)'\, p_2]\,(p_1^2 + p_2^2) - 3\,\alpha\, p_0\, p_1\, p_2 = 0\,.$$

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \omega_1\,[-(\ln\sigma)' + 2\,(A_1 + \sigma)]\, p_1^2\, p_2 \\ & + \omega_2\,[(\ln\sigma)' - 2\,(A_2 - \sigma)]\, p_1\, p_2^2 \\ & - 3\, p_0\,(-\omega_1\, p_1 + \omega_2\, p_2)\,(\omega_1\, p_1 + \omega_2\, p_2) \\ & = 0\,. \qquad (46)\end{aligned}$$

Die Krümmungsmittelpunkte in den Scheiteln der Bahnkurven liegen auf einer Kurve $\bar{\Omega}$, die als *Mittelpunktkurve* bezeichnet werden kann. $\bar{\Omega}$ ergibt sich als Kreispunktkurve der inversen Bewegung und hat daher die gleichen Eigenschaften wie Ω.

Ω und $\bar{\Omega}$ gehen durch die momentanen Fixpunkte der hyperbolischen Bewegung. Im eigentlichen Fixpunkt haben sie einen gemeinsamen Doppelpunkt und die Polbahntangente und die Polbahnnormale als gemeinsame Doppelpunktstangenten. Dabei berühren sie sich längs der Polbahntangente von erster Ordnung und längs der Polbahnnormalen von zweiter Ordnung. In den uneigentlichen Fixpunkten schneiden sich die beiden Kurven dritter Ordnung einfach.

Durchlaufen die eigentlichen Polbahnen in E und $\bar{E}$ gleichzeitig Scheitelpunkte, d.h. gilt $\varrho' = \bar{\varrho}' = 0$, so zerfällt nach (29) die Kreispunktkurve (46) in die Polbahnnormale und einen die eigentliche Polbahn berührenden Kegelschnitt.

Hubert Frank, Universität Freiburg i. Br.

LITERATUR

[1] M. Barner, *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Math. Z. *62*, 50–93 (1955).
[2] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie der Regelflächen*, Math. Z. *52*, 791–809 (1950).
[3] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, 1. Teil (Vandenhoeck + Ruprecht, Göttingen 1950).
[4] R. Garnier, *Cours de Cinématique*, Tome III (Gauthier-Villars, Paris 1951).
[5] G. W. M. Kallenberg, *Plane Hyperbolic Differential Goemetry*, Nieuw Arch. v. Wisk. (3), *9*, 1–15 (1961).