Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 6

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Remark 3. Theorem 2 holds good for generalised integers $\{l_n\}$ also, that is, if $F(x)$ and $G(x)$ are functions of a real variable $x \geqslant 1$, then

$$G(x) = \sum_{l_n^k \leq x} F\left(\frac{x}{l_n^k}\right) \iff F(x) = \sum_{l_n^k \leq x} \mu(l_n)\, G\left(\frac{x}{l_n^k}\right).$$

In case $k = 1$ this theorem reduces to a theorem established by HORADAM (cf. [5], theorem 3).

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

REFERENCES

[1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. *74*, 66–80 (1960).
[2] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford 1965).
[3] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions of Generalised Primes*, Amer. Math. Monthly *68*, 626–629 (1961).
[4] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of a Generalised Integer*, Amer. Math. Monthly *69*, 196–199 (1962).
[5] E. M. HORADAM, *The Order of Arithmetical Functions of Generalised Integers*, Amer. Math. Monthly *70*, 506–512, (1963).

Aufgaben

Aufgabe 634. Es seien f, g zwei im Intervall $[a, b]$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant c > 0$ für alle $x \in [a. b]$. Ferner seien p, q reelle Zahlen mit $0 < p < 1$, $q < 0$, $1/p + 1/q = 1$. Man leite die «Gegenform zur Hölderschen Ungleichung»

$$\int_a^b f\, g\, dx \geqslant \left(\int_a^b f^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\, dx\right)^{1/q}$$

direkt aus der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung her. H. Hadwiger, Bern

Lösung: Die auf die vorliegende Aufgabenstellung zugeschnittene Form der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung besagt: Sind F, G in $[a, b]$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit $F(x) \geqslant 0$, $G(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt für alle reellen r, s mit $r > 1$ und $1/r + 1/s = 1$:

$$\int_a^b FG\, dx \leqslant \left(\int_a^b F^r\, dx\right)^{1/r} \left(\int_a^b G^s\, dx\right)^{1/s}. \tag{*}$$

Setzen wir $r = 1/p$, $s = -q/p$, so ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe (über p, q) $r > 1$ sowie $1/r + 1/s = p - p/q = p\,(1 - 1/q) = 1$ erfüllt. Wählen wir weiter $F = (fg)^p$, $G = g^{-p}$, so genügen auch F und G nach den (über f, g) gemachten Voraussetzungen den für die Gültigkeit der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung hinreichenden Bedingungen, und man erhält aus (*)

$$\int_a^b f^p\,dx \leqslant \left(\int_a^b fg\,dx\right)^p \left(\int_a^b g^q\,dx\right)^{-p/q},$$

woraus sich sofort die Behauptung der Aufgabe ergibt.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

Aufgabe 635. Ist $\alpha(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier natürlicher Zahlen (unter Berücksichtigung der Reihenfolge), so gilt für $R(s) > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2\,s)},$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Es sei allgemeiner für reelle a und b

$$\alpha_{a,b}(n) = \sum_{[x,y]=n} x^a\, y^b .$$

Man zeige, dass für $R(s) > 1 + \max(a, b, a+b)$ die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a\,b}(n)}{n^s} = \frac{\zeta\,(s-a)\,\zeta\,(s-b)\,\zeta\,(s-a-b)}{\zeta\,(2s-a-b)}$$

gilt.

H. Scheid, Mainz

First Solution: If g, h are arbitrary functions,

$$f(n) = \sum_{[x,y]=n} g(x)\,h(y), \quad F(n) = \sum_{x|n} f(x), \quad G(n) = \sum_{x|n} g(x), \quad H(n) = \sum_{x|n} h(x),$$

it follows that

$$F(n) = \sum_{k|n}\ \sum_{[x,y]=k} g(x)\,h(y) = \sum_{x|n}\sum_{y|n} g(x)\,h(y) \sum_{\substack{k|n\\ [x,y]=k}} 1 .$$

Since the inner sum is 1, we get

$$F(n) = G(n)\,H(n) . \tag{*}$$

In particular, if

$$g(x) = x^a, \quad h(y) = y^b,$$

then

$$f(n) = \alpha_{a,b}(n), \quad G(n) = \sigma_a(n), \quad H(n) = \sigma_b(n) .$$

Thus, by (*),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)}{n^s} .$$

But by a well-known formula of Ramunajan (cf. e.g. E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford 1951, p. 8, (1.3.3.))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

and therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}.$$

This evidently holds for

$$R(s) > 1 + \max(0, a, b, a+b)\,. \tag{**}$$

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

Zweite Lösung: Da $\alpha_{0,0}(n) = \sum_{[x,y]=n} 1 = \alpha(n)$ für alle natürlichen n gilt, ist die erste Behauptung in der zweiten enthalten, und wir zeigen nur diese. Für $R(s) > 1 + \max(a, b, a+b)$ ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} \\ &\quad = \prod_p \frac{1-p^{a+b-2s}}{(1-p^{a-s})\,(1-p^{b-s})\,(1-p^{a+b-s})} =: \prod_p F(p)\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für jede Primzahl p ist

$$\begin{aligned} F(p) &= (1-p^{a+b-2s}) \sum_{i,j,k \geq 0} p^{(i+k)a+(j+k)b-(i+j+k)s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \right) p^{(i+k)a+(j+k)b-(i+j+k)s} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \sum_{\substack{(u,v) \\ \max(u,v)=m}} p^{ua+vb}\,. \end{aligned}$$

Hierin ist in der inneren Summe über alle geordneten Paare (u, v) nichtnegativer ganzer Zahlen zu summieren, deren Maximum gleich ist m. Also ist

$$\prod_p F(p) = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \sum_{\substack{(u,v) \\ \max(u,v)=m}} p^{ua+vb}\,, \tag{2}$$

und daher lässt sich der Ausdruck links in (1) in der Form einer Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ (in eindeutiger Weise!) schreiben, wo die a_n zu bestimmen bleiben. Ist $n = \prod_{r=1}^{t} p_r^{m_r}$, so ist wegen (2)

$$a_n = \sum_{\substack{(u_r, v_r) \text{ mit} \\ \max(u_r, v_r) = m_r \\ (r=1,\ldots,t)}} (p_1^{u_1} \cdots p_t^{u_t})^a\,(p_1^{v_1} \cdots p_t^{v_t})^b = \sum_{\substack{x = p_1^{u_1} \cdots p_t^{u_t} \\ y = p_1^{v_1} \cdots p_t^{v_t} \\ \max((u_r, v_r) = m_r \\ (r=1,\ldots,t)}} x^a y^b = \alpha_{a,b}(n)$$

für alle natürlichen n; denn offensichtlich bedeuten die Bedingungen in der zweiten Summe, dass genau über die geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen zu summieren ist, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches n ist.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

Eine weitere Lösung – unter der stärkeren Voraussetzung (**) wie die obige erste Lösung – sandte A. Bager (Hjørring, Dänemark).

Aufgabe 636. In einer Ebene sind zwei Geraden g_1, g_2 und drei Punkte A_1, A_2, P gegeben. Man bestimme diejenigen durch A_1 und A_2 gehenden Kegelschnitte, die g_1 und g_2 berühren und deren Berührungspunkte mit P kollinear sind.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Die durch P gehenden Berührsehnen der beiden Lösungskegelschnitte ergeben sich als Doppelstrahlen jener Strahleninvolution mit dem Scheitel P, von der PA_1 und PA_2 sowie PG_1 und PG_2 zwei Strahlenpaare sind, wobei G_1 und G_2 die Schnittpunkte der Geraden A_1A_2 mit den Geraden g_1 bzw. g_2 bedeuten. Diese Lösung lässt sich durch kollineare Verallgemeinerung jenes Sonderfalles herleiten, bei dem A_1 und A_2 die absoluten Punkte sind, wobei die Lösungskegelschnitte dann jene g_1 und g_2 berührenden Kreise sind, deren Berührsehnen durch P gehen.

K. Grün, Linz, Donau, Österreich

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Sachs (Stuttgart) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

Aufgabe 637. Am ebenen Dreieck mit Flächeninhalt $(1/2)\sqrt{abcd} = (1/2)\sqrt{h_a h_b h_c h} = \sqrt{r_a r_b r_c r} = \sqrt{s_a s_b s_c s}$ (Seiten, Höhen, Berührradien, Berührstrecken) zeige man: Die Grössen $x = \sqrt{r_a/s_b}$ und $y = \sqrt{h_a/b}$ genügen den Ungleichungen

$$x^3 + 2\sqrt{s/r} \leqq x\, s/r\,, \tag{1}$$

$$y^3 + 2\sqrt{d/h} \leqq 2\, y\, s/h\,. \tag{2}$$

Gleichheit genau im Falle $a = b$.

I. Paasche, München

Lösung: Man sieht leicht ein, dass $d = \dfrac{F}{R}$, $h = 2\,R$, $x = \sqrt{\dfrac{s-c}{r}}$ und $y = \sqrt{\sin\gamma}$. Man hat daher

$$x^3 + 2\sqrt{\frac{s}{r}} \leqq x\,\frac{s}{r} \Leftrightarrow \frac{s-c}{r}\sqrt{\frac{s-c}{r}} + 2\sqrt{\frac{s}{r}} \leqq \sqrt{\frac{s-c}{r}}\cdot\frac{s}{r}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{s}{r}} \leqq \frac{c}{r}\sqrt{\frac{s-c}{r}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{s}{s-c}} \leqq \frac{c}{r} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{r_c}{r}} \leqq \frac{c}{r}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r\,r_c} \leqq \frac{c}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(s-a)\,(s-b)} \leqq \frac{(s-a)+(s-b)}{2}\,.$$

Und weiter:

$$y^3 + 2\sqrt{\frac{d}{h}} \leqq 2y\frac{s}{h} \Leftrightarrow \sin\gamma\sqrt{\sin\gamma} + \sqrt{\frac{2F}{R^2}} \leqq \frac{s}{R}\sqrt{\sin\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2F}{\sin\gamma}} \leqq s - R\sin\gamma \Leftrightarrow \sqrt{a\,b} \leqq s - \frac{c}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a\,b} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Die Richtigkeit beider Ungleichungen (mit Gleichheit genau für $a = b$) folgt sofort aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham, N.C., USA) und H. Frischknecht (Berneck SG).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Juli 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 658. If k is a positive integer and φ and J_k are the totient functions of Euler and Jordan, then show that for every positive integer n

$$J_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \ldots d_k = n} \varphi(d_1)\,\varphi(d_2^2)\ldots\varphi(d_k^k)\,,$$

where the summation extends over all ordered k-tuples $(d_1, \ldots, d_k)$ such that $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = n$.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 659. Let L and M denote the sets of positive integers all of whose prime factors are of multiplicity $\geqslant 2$ and $\geqslant 4$, respectively. The integer 1 is considered to be a member of both L and M. Show that for every positive integer k

$$\sum_{n\in L}\frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \zeta(2k) \quad \text{and} \quad \sum_{n\in M}\frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \frac{\zeta(4k)\,\zeta(6k)}{\zeta(12k)}\,,$$

where λ is Liouville's function and J_k Jordan's totient function.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 660. *Voraussetzung:* $\boldsymbol{X}(t)$ sei eine geschlossene C^4-Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, die von jeder Ebene durch $\boldsymbol{O}$ in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Der Parameter t sei so gewählt, dass $\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'') = 1$. Dann ist die Kurve $\boldsymbol{X}$ (das heisst das Tripel ihrer Koordinatenfunktionen) Lösung der Differentialgleichung

$$x''' + px' + qx = 0$$

(alle Kurven, die Lösungen sind, sind untereinander affin mit einer linearen (= homogenen) Transformation mit Determinante ± 1).

Behauptung: Entweder ist $q = p'$, oder $F(t) = q - p'$ wechselt wenigstens viermal das Vorzeichen auf der Kurve. H. Guggenheimer, Brooklyn, N.Y., USA

Aufgabe 661. For a triangle with circumradius R, semiperimeter s, sides a, b, c, contact segments s_a, s_b, s_c, exradii r_a, r_b, r_c and altutides h_a, h_b, h_c, prove the inequalities

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geqslant \frac{s}{R}, \tag{1}$$

$$\frac{h_a}{s_a} + \frac{h_b}{s_b} + \frac{h_c}{s_c} \geqslant \frac{2s}{R} \tag{2}$$

with equalities if and only it the triangle is equilateral.

Z. M. Mitrović, Vranje, Yugoslavia

Literaturüberschau

General Topology and its Applications — a Journal Devoted to Set Theoretic, Axiomatic and Geometric Topology. Eine neue (vierteljährliche) Zeitschrift der North-Holland Publishing Company, Amsterdam. US \$ 20.00 pro Band. Das erste Heft erschien im April 1971.

Die Zeitschrift bringt in erster Linie kürzere Originalarbeiten, aber auch ausgewählte Übersichtsartikel. In Anbetracht der Stellung, die die Allgemeine Topologie als Grunddisziplin der heutigen Mathematik innehat, ist diese Publikation sehr erwünscht, um so mehr, als sie von bestausgewiesenen Fachleuten betreut wird.

Kostenlose Probeexemplare können beim Verlag in Amsterdam (P.O. Box 3489) angefordert werden. J. Rätz

Problems in Analysis — a Symposium in Honor of Salomon Bochner. Edited by R. C. Gunning. X und 351 Seiten. \$ 13.50. No. 31, Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Das Symposium fand vom 1. bis 3. April 1969 zur Feier des 70. Geburtstages von S. Bochner (20. August 1969) an der Princeton University statt. Der Festband enthält in einem ersten Teil sieben Vorlesungen, die am Symposium gehalten wurden; die Autoren sind E. Calabi, S.-S. Chern, H. Furstenberg, H. Grauert und O. Riemenschneider, S. Karlin und J. McGregor, J. F. C. Kingman, I. Segal. Der zweite Teil bringt siebzehn Originalartikel von Mathematikern, die in ihrer Arbeit von Bochner geführt, ermutigt oder inspiriert worden sind. Die Themen lauten: Linearization of the product of orthogonal polynomials; Eisenstein series on tube domains; Laplace-Fourier transformation, the foundation for quantum information theory and linear physics; An integral equation related to the Schroedinger equation with an application to integration in function space; A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian; The integral equation method in scattering theory; Group algebra bundles; Quadratic periods of hyperelliptic abelian integrals; The existence of complementary series; Some recent developments in the theory of singular perturbations; Sequential convergence in lattice groups; A group-theoretic lattice-point problem; The Riemann surface of Klein with 168 automorphisms; Envelopes of holomorphy of domains in complex Lie groups; Automorphisms of commutative Banach algebras; Historical notes on analyticity as a concept in functional analysis; A-almost automorphic function.