Zugehörigkeitstafeln und charakteristische Funktionen

Autor(en): **Jeger, M. / [s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 6

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28638

Wegen (3) folgt

$$f(x) \circ f(y) = f(f(x) * f(y)) .$$

Andererseits gilt nach (1)

$$f(x) \circ f(y) = f(x * y) .$$

Daraus folgt (2). Das ergibt den

Satz. In einem Verknüpfungsgebilde $(A, *)$ lässt sich jede Kongruenzrelation darstellen durch eine Abbildung f von A in sich mit

$$f(f(x) * f(y)) = f(x * y) ,$$

und zu jeder Abbildung dieser Art gehört eine Kongruenzrelation von A.

Bei unseren Überlegungen konnten wir die Schlüsse ziehen:
Aus (2) folgt (1) und aus (1) und (3) folgt (2). Es fragt sich nun, ob umgekehrt aus (2) schon (3) folgt. Das ist aber nicht der Fall, Gegenbeispiel: $A = \{0, 1\}$, $0 * 0 = 0 = 1 * 1$, $1 * 0 = 1 = 0 * 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. (2) ist erfüllt; (3) ist verletzt, denn $f(f(0)) = f(1) \neq f(0)$.

Hans-Joachim Vollrath, PH Würzburg

Elementarmathematik und Didaktik

Zugehörigkeitstafeln und charakteristische Funktionen

Man wundert sich immer wieder, dass sich die Didaktiker im Zeitalter der Mengen-Mathematik nur zaghaft an die Aufgabe heranmachen, Beweisverfahren für die Grundgesetze der Mengenalgebra zu entwickeln, die auch im Schulunterricht traktabel sind. Bei der Mehrzahl der in neuerer Zeit erschienenen Unterrichtswerke besteht die Verankerung der Mengenalgebra in der Veranschaulichung dieser Gesetze an Venn-Diagrammen. Autoren mit einem besser ausgebildeten mathematischen Gewissen weisen noch darauf hin, dass die Grundgesetze der Mengenalgebra auf die Regeln der Aussagen-Logik zurückgeführt werden können. In seltenen Fällen wird die Abstützung auf die Aussagen-Logik ausführlich dargelegt, aber diese wird dann fast ausnahmslos mit einem Feuerwerk in formaler Logik erkauft. Von der unterrichtlichen Situation her sind solche Beweisverfahren vorzuziehen, bei denen die Aussagen-Logik nur implizit verwendet wird. Die bisherigen Erfahrungen zeigen nämlich mit aller Deutlichkeit, dass bei einer Behandlung der Aussagen-Logik im Schulunterricht mehr Zeit damit vertan wird, um über die Mathematik zu reden, statt Mathematik zu treiben.

Zur Zurückführung der Grundgesetze der Mengenalgebra auf möglichst evidente Tatbestände stehen verschiedene Wege offen, bei denen die Aussagen-Logik nur implizit benutzt wird. In didaktischer Sicht dürfte das *Beweisverfahren mit Zugehörigkeitstafeln* im Vordergrund stehen, das eigenartigerweise in der Schule noch recht wenig bekannt ist. Es soll hier kurz dargelegt und auf seine Tragweite hin untersucht werden. A. Kirsch hat unlängst gezeigt[1]), dass geeignete Venn-Diagramme bei vorsichtiger Interpretation dasselbe leisten können. Aber die unumgängliche Gebrauchsanweisung für die Venn-Diagramme, die vom Lehrer und von den Schülern eingehalten werden muss, dürfte die Beweiskraft dieses Verfahrens doch etwas herabmindern. Ein Venn-Diagramm weckt zu stark die Vorstellung gewisser Mächtigkeiten und gerade dies muss dort ferngehalten werden.

1. *Das Beweisverfahren mit Zugehörigkeitstafeln*

Die Grundoperationen der Mengenalgebra sind *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplementbildung* in bezug auf eine vorgegebene Universalmenge U. Will man die diesbezüglichen Rechenregeln beweisen, so kann man bei der Definition der Mengen-Operationen anknüpfen. Man hat dann die Zeichen $\cup$, $\cap$ und $^-$ jeweils in ODER, UND und NICHT umzudeuten und anschliessend die Identität der links und rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Mengen nachzuweisen. Bei den Kommutativ- und Assoziativ-Gesetzen geht dies mühelos, aber bei andern Gesetzen verlangt dieses Verfahren einige Überlegung. Solche Beweise lassen sich viel einfacher führen, wenn man sie schematisiert.

Das Beweisverfahren mit Zugehörigkeitstafeln beruht auf dem folgenden Gedanken. Sind A und B zwei beliebige Mengen, dann liegt für jedes Element x in einer geeignet gewählten Universalmenge einer der folgenden vier Fälle vor:

$x \notin A$ und $x \notin B$
$x \notin A$ und $x \in B$
$x \in A$ und $x \notin B$
$x \in A$ und $x \in B$

Wir halten nun diese vier Fälle in einer Zugehörigkeitstafel fest, in der wir das Enthaltensein durch die Zahl 1, das Nichtenthaltensein durch die Zahl 0 zum Ausdruck bringen:

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	
0	0	0	0	
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	1	1	Tafel I

Ein Element x von U ist genau dann in der Menge $A \cup B$ enthalten, wenn es in mindestens einer der Mengen A oder B liegt. In der Kolonne von $A \cup B$ ist also überall dort eine 1 zu schreiben, wo in der Kolonne von A oder in der Kolonne von B eine 1 steht; dies trifft für die drei letzten Zeilen zu. Mit einer entsprechenden Überlegung

[1]) Vgl. [3]

kann man die Werteverteilung in der Kolonne von $A \cap B$ erhalten. x ist Element von $A \cap B$, wenn es zugleich in A und in B enthalten ist. In der Kolonne von $A \cap B$ steht also genau dann eine 1, wenn in den Kolonnen von A und von B zugleich eine 1 steht. Diese Situation liegt in der vierten Zeile vor.

In der Kolonne von $A \cup B$ steht nun offenbar das Maximum, in der Kolonne von $A \cap B$ das Minimum aus den beiden Zahlen in den Kolonnen von A und von B.

Für eine Menge A und deren Komplement $\bar{A}$ bestehen die Implikationen

$$x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A} \quad \text{und} \quad x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$$

was zur Tafel

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Tafel II

Anlass gibt.

Aus den Zugehörigkeitstafeln für Vereinigung, Durchschnitt und Komplement kann man nun die Zugehörigkeitstafel für jede Menge konstruieren, die mit den Operationen $\cup$, $\cap$ und $^-$ aus irgendwelchen Mengen $A, B, C, \ldots$ gebildet ist. Darauf beruht das Beweisverfahren mit Zugehörigkeitstafeln.

Als erstes Beispiel beweisen wir das *Verschmelzungs-Gesetz* $A \cap (A \cup B) = A$.

A	B	$A \cup B$	$A \cap (A \cup B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Zwei Mengen sind offenbar gleich, wenn in den entsprechenden Kolonnen der Zugehörigkeitstafel dieselben Werteverteilungen auftreten. Dies trifft hier für die erste und vierte Kolonne zu, so dass also

$$A \cap (A \cup B) = A\ .$$

Der Beweis der *de Morgan-Regel* $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ wird mit der folgenden Zugehörigkeitstafel geleistet:

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Schliesslich sei noch ein Rechen-Gesetz mit drei freien Mengen verifiziert. Wir wählen als Beispiel das *Distributiv-Gesetz* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Die Zugehörigkeitstafel umfasst jetzt 8 Zeilen, da in bezug auf jede der drei Mengen die Werte 0 oder 1 möglich sind.

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Hier stimmen die Werteverteilungen in der fünften und letzten Kolonne überein und dies beweist das vorliegende Distributiv-Gesetz.

Man kann mit diesem kombinatorischen Beweisverfahren mühelos sämtliche Gesetze der Mengenalgebra bestätigen.

2. *Charakteristische Funktionen*

In der didaktischen Literatur wird in den Zugehörigkeitstafeln das Enthaltensein meist durch das Zeichen $\in$, das Nichtenthaltensein durch das Zeichen $\notin$ angezeigt. Verwendet man dafür die Zahlen 1 und 0, dann schafft man sich zugleich eine Ausgangsbasis für ein interessantes Feld von weiterführenden Zusammenhängen.

Wir denken uns für die folgenden Betrachtungen weiterhin eine geeignete Universalmenge U ausgezeichnet; alle vorkommenden Mengen A, B, C, ... sind Teilmengen von U.

Definition: *Ist $A \subset U$, dann heisst die Funktion f_A mit*

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn} \quad x \in A \\ 0 & \textit{wenn} \quad x \notin A,\ d.h.\ x \in \bar{A} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion zu A auf der Menge U.

Auf Grund der Definitionen von Vereinigung, Durchschnitt und Komplement schliesst man sofort auf die folgenden Beziehungen:

$$f_{A \cap B}(x) = \min(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x) \cdot f_B(x) \tag{1}$$

$$f_{A \cap A}(x) = f_A(x) \cdot f_A(x) = f_A(x) \tag{2}$$

$$f_{A \cup B}(x) = \max(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) \tag{3}$$

$$f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x) \tag{4}$$

Ferner besteht die Äquivalenz

$$A = B \iff f_A(x) = f_B(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U\,. \tag{5}$$

Die Mengen A und B sind also genau dann gleich, wenn die charakteristischen Funktionen f_A und f_B übereinstimmen.

Es liegt nun auf der Hand, die Zugehörigkeitstafeln I und II als Verknüpfungstafeln für $f_{A \cup B}(x)$, $f_{A \cap B}(x)$ und $f_{\bar{A}}(x)$ aufzufassen. Das Beweisverfahren mit Zugehörigkeitstafeln beruht dann offenbar auf der Äquivalenz (5).

Die drei Beweise, die zuvor mit Hilfe von Zugehörigkeitstafeln bewältigt wurden, nehmen in der Sprache der charakteristischen Funktionen folgende Gestalt an.

Beweis des Verschmelzungs-Gesetzes: für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} f_{A \cap (A \cup B)}(x) &= f_A(x)\,(f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)) \\ &= f_A(x) + f_A(x) \cdot f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \end{aligned}$$

Beweis der de Morgan-Regel: für alle $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} f_{\overline{A \cup B}}(x) &= 1 - f_{A \cup B}(x) = 1 - (f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)) \\ &= (1 - f_A(x))\,(1 - f_B(x)) = f_{\bar{A}}(x) \cdot f_{\bar{B}}(x) \end{aligned}$$

Beweis des Distributiv-Gesetzes: für alle $x \in U$ ist

$$\begin{aligned} f_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= (f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x))\,(f_A(x) + f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x)) \\ &= f_A(x) + f_B(x) \cdot f_C(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) \cdot f_C(x) = f_{A \cup (B \cap C)}(x) \end{aligned}$$

Bekanntlich kann die Teilmengen-Relation auf Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung zurückgeführt werden. Insbesondere bestehen die Äquivalenzen

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \varnothing \Leftrightarrow \bar{A} \cup B = U\,. \qquad (6)$$

Dies kann man ebenfalls mit Zugehörigkeitstafeln beweisen. Hier sei der Beweis unter Verwendung charakteristischer Funktionen durchgeführt. Man benötigt dazu die Äquivalenz

$$A \subset B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U \qquad (7)$$

Ganz gleichgültig, ob man die linke oder die rechte Seite voraussetzt, sind nämlich nur die in der folgenden Tafel aufgeführten Werteverteilungen möglich, und man schliesst daraus, dass in beiden Fällen auf der andern Seite des Äquivalenzzeichens eine richtige Aussage steht.

$f_A(x)$	$f_B(x)$
0	0
0	1
1	1

Es ist nun

$$\begin{aligned} f_A(x) \leq f_B(x) \Leftrightarrow \min(f_A(x), f_B(x)) &= f_A(x) \Leftrightarrow \max(f_A(x), f_B(x)) = f_B(x) \\ f_{A \cap B}(x) &= f_A(x) \qquad\qquad f_{A \cup B}(x) = f_B(x) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) &\Leftrightarrow f_A(x)\,(1 - f_B(x)) = 0 \Leftrightarrow f_A(x) \cdot f_{\bar{B}}(x) = f_{\varnothing}(x) \\ f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) &\Leftrightarrow (1 - f_A(x)) + f_B(x) - (1 - f_A(x))\,f_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow f_{\bar{A} \cup B}(x) = f_U(x) \end{aligned}$$

Die einzelnen Aussagen gelten durchgehend für alle $x \in U$.

Auf Grund von (7) zeigt man ebenfalls mühelos, dass die Teilmengen-Relation eine Halbordnung darstellt; sie ist reflexiv, identitiv und transitiv.

3. *Charakteristische Funktionen in der Kombinatorik*

Mit den charakteristischen Funktionen bietet sich ein elementarer Zugang zu einem wichtigen Abzählverfahren in der modernen Kombinatorik an, das als *Prinzip des Ein- und Ausschaltens* bekannt ist.

Setzt man eine *endliche* Universalmenge U voraus, dann ist

$$\sum_{x \in U} f_A(x) = \mu(A) \tag{8}$$

die Mächtigkeit der Menge A. Die Summe ist über alle Elemente x von U zu erstrecken.

Aus der Beziehung (3)

$$f_{A_1 \cup A_2}(x) = f_{A_1}(x) + f_{A_2}(x) - f_{A_1}(x) \cdot f_{A_2}(x)$$

entnimmt man auf Grund von (8) die folgende Beziehung für die Mächtigkeiten

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \tag{9}$$

Die Formel (9) kann nun leicht auf n Teilmengen von U erweitert werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} f_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}(x) &= f_{\overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}}(x) = 1 - f_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}(x) \\ &= 1 - (1 - f_{A_1}(x))\,(1 - f_{A_2}(x)) \ldots (1 - f_{A_n}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}(x) - \sum_{i<j} f_{A_i}(x)\, f_{A_j}(x) + \sum_{i<j<k} f_{A_i}(x)\, f_{A_j}(x)\, f_{A_k}(x) - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x) \ldots f_{A_n}(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Die zweite Summe läuft über alle Zweier-Kombinationen ohne Wiederholungen aus den Indizes $1, 2, \ldots, n$, d.h. über alle Paare (i, j) mit $i < j$. Bei der dritten Summe geht es um die Dreier-Kombinationen ohne Wiederholungen; dies sind die Tripel (i, j, k) mit $i < j < k$. Die folgenden Summen sind analog gebildet.

Summiert man nun über alle Elemente von U, dann wird man auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu\,(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(\mathrm{A}_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\qquad - \ldots + (-1)^{n-1} \quad (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned} \tag{11}$$

geführt. Dies ist die sogenannte *Ein- und Ausschaltformel*, mit der eine Reihe von interessanten Problemen aus der abzählenden Kombinatorik bewältigt werden kann. Für Anwendungsbeispiele muss auf [1], [2] und [4] verwiesen werden.

In den Anwendungen begegnet man der Ein- und Ausschaltformel häufig auch in der Gestalt

$$\begin{aligned} &\mu(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) \\ &\qquad = \mu(U) - \sum \mu(A_i) + \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) - \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

die aus

$$f_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}(x) = (1 - f_{A_1}(x))\,(1 - f_{A_2}(x)) \ldots (1 - f_{A_n}(x))$$

hervorgeht.

Man kann ebenso leicht auch für andere *Voll-Konjunktionen*[2]) aus n Mengen die charakteristischen Funktionen und die Mächtigkeiten bestimmen. So ist etwa

$$f_{A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4}(x) = f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x)\, (1 - f_{A_3}(x))\, (1 - f_{A_4}(x))$$
$$= f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x) - f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x)\, f_{A_3}(x) - f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x)\, f_{A_4}(x) + f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x)\, f_{A_3}(x)\, f_{A_4}(x)$$

und damit

$$\mu(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4)$$
$$= \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Man kann die letzte Beziehung als Sonderfall der Formel (12) auffassen mit $U' = A_1 \cap A_2$ und den beiden Teilmengen $A_1' = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ und $A_2' = A_1 \cap A_2 \cap A_4$. Auf diese Weise kann man zu interessanten Verallgemeinerungen der Ein- und Ausschaltformel gelangen.

Eine andere Verallgemeinerung besteht darin, dass man den Elementen von U Gewichte beilegt. Es sei dem Element $x \in U$ die reelle Zahl $w(x)$ als Gewicht zugeordnet. Ferner sei

$$\omega(A) = \sum_{x \in U} w(x)\, f_A(x) \tag{13}$$

$\omega(A)$ ist die Summe der Gewichte aller Elemente von A. Man erhält nun

$$\omega(A_1 \cup A_2) = \sum_{x \in U} w(x)\, f_{A_1 \cup A_2}(x)$$
$$= \sum_{x \in U} w(x)\, f_{A_1}(x) + \sum_{x \in U} w(x)\, f_{A_2}(x) - \sum_{x \in U} w(x)\, f_{A_1}(x)\, f_{A_2}(x)$$
$$= \omega(A_1) + \omega(A_2) - \omega(A_1 \cap A_2) \tag{14}$$

Dies ist die kennzeichnende Beziehung für eine sogenannte additive Funktion auf der Potenzmenge von U.

Die Beziehung (10) gibt nun sofort Anlass zur folgenden Verallgemeinerung der Ein- und Ausschaltformel:

$$\omega(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \sum \omega(A_i) - \sum_{i<j} \omega(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \omega(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\, \omega(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ist $w(x) = 1$ für alle $x \in U$, so erhält man die Mächtigkeit. Ein anderes Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit über einem endlichen Stichprobenraum. Dort ist

$$0 \leq w(x) \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{x \in U} w(x) = 1\,.$$

---

[2]) Unter einer Voll-Konjunktion aus n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ versteht man einen Durchschnitt von der Gestalt
$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ mit $X_j = A_j$ oder $\bar{A}_j$

Die voranstehenden Bemerkungen möchten einige Anregungen für die Schulpraxis vermitteln. Der Autor möchte damit insbesondere auch darlegen, dass die Modernisierung des Mathematik-Unterrichtes nicht aus einem Strohfeuer in Mengenalgebra bestehen muss. Eine Akzentuierung des Mengenbegriffs im Unterricht hat überhaupt erst dann einen Sinn, wenn damit echte Probleme angegangen werden.

M. Jeger, Luzern

LITERATUR

[1] M. JEGER, *Kombinatorik*, 1. Teil (Stuttgart 1973).

[2] M. JEGER und R. INEICHEN, *Aufgabensammlung zur Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Zürich 1971).

[3] A. KIRSCH, *Venn-Diagramme und freie Boole'sche Verbände, Der Mathematik-Unterricht, 1972*, Heft 2 (Stuttgart 1972).

[4] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics* (New Jersey 1963).

[5] M. TOUSSAINT, *Grundkurs Mathematik*, Studienbrief I, 1: Mengen, (Tübingen 1970).

[6] H. H. TEH, *The Fundamental Theorem of Venn-Diagram and the In-Out Tables*, Nanta Mathematica III/2, (1969).

Eine Klasse von Abzählproblemen

In der vorliegenden Note stehen alle Unbestimmten für natürliche Zahlen, und es bedeutet p immer eine Primzahl.

Es geht um die folgenden vier Probleme:
Gegeben ist eine Zahl n,

1. *Wieviele Zahlen x gibt es, so dass $n + x \mid nx$?*
2. *Wieviele Zahlen $x < n$ gibt es, so dass $n - x \mid nx$?*
3. *Wieviele Zahlen $x > n$ gibt es, so dass $x - n \mid xn$?*
4. *Wieviele ungeordnete Zahlenpaare (v, w) gibt es mit dem kgV n?*

Die Anzahlen der Lösungen des ersten, zweiten, dritten, vierten Problems seien in dieser Reihenfolge mit $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ bezeichnet.

1. *Einleitung zum ersten Problem*

In [2] findet sich die Aufgabe, alle Paare (n, m) natürlicher Zahlen zu bestimmen, deren Summe Teiler ihres Produktes ist. Es soll also gelten:

$$n + m \mid nm .$$

Zur Herleitung der Lösung stellen wir zunächst fest, dass Summe und Produkt zweier teilerfremder Zahlen wieder teilerfremd sind. Ist t der ggT von n und m, und $(n, m) = (ta, tb)$, so lautet die zu erfüllende Bedingung:

$$t(a + b) \mid t^2 a b , \quad \text{und damit} \quad a + b \mid tab .$$