Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 2

Indeed, if $x \in X$, let $R(x) = \{y \mid (x, y) \in R\}$, and set $B = \{R(x) \mid x \in X\}$. By the axiom of choice there is a function $f: X \to \cup B$ such that $f(x) \in R(x)$ for each $x \in X$; clearly, $f \in F$. Let U denote the union of the functions in F. Then $U \subset R$. Assume that there is an element (x, y) in R which is not in U. Let $f \in F$. Then $(x, y) \notin f$. Since f is a function with domain X there is a unique $z \in X$ such that $(x, z) \in f \subset R$. Define a new function g from f by replacing the element (x, z) in f by the original element (x, y). Since $f \subset R$ and $(x, y) \in R$ we have $g \subset R$; that is, $g \in F$. It follows that $(x, y) \in g \subset U$, contrary to the way that (x, y) was chosen. The proof is now complete.

It is easy to see that the axiom of choice is a consequence of the theorem. In fact, if $E = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is a nonempty family of nonempty sets, let R be the relation from A into $\cup E$ given by $R = \{(\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A,\ x_\alpha \in X_\alpha\}$. By the theorem there is a function $f \subset R$ such that $f(\alpha) \in X_\alpha$ for each $\alpha \in A$, i.e., f is a choice function. Hence, the theorem and the axiom of choice are equivalent.

R. S. Doran, Texas Christian University, USA

Aufgaben

Aufgabe 642. Am ebenen Dreieck mit Seiten abc, Inradius r, Umradius R und Flächeninhalt rs beweise man die Verschärfung

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 + k\,[r\,s\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})\,r\,(R - 2\,r)] \leqslant \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & \text{für } k = 4 \\ (a+b+c)^2/2 & \text{für } k = 6 \end{cases}$$

zweier Ungleichungen von H. Hadwiger, JBer. DMV *49*, 2. Abt. S. 35–39.

I. Paasche, München

Solution: Since

$$3[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 - a^2 - b^2 - c^2]$$

$$= 2\left[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right]$$

the two stated inequalities are equivalent. It accordingly suffices to prove the first.

For $k = 4$ we have to prove

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4\,rs\sqrt{3} + 4(4 - 2\sqrt{3})\,r\,(R - 2\,r) \leqslant 2(bc + ca + ab)\,, \qquad (*)$$

or what is the same thing,

$$(a+b+c)^2 + 4\,rs\sqrt{3} + 4\,(4 - 2\sqrt{3})\,r\,(R - 2\,r) \leqslant 4\,(bc + ca + ab)\,.$$

Since

$$bc + ca + ab = s^2 + 4\,Rr + r^2\,,$$

this reduces to

$$rs\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})\, r\, (R - 2r) \leqslant 4\, Rr + r^2,$$

or

$$s \leqslant 2R + (3\sqrt{3} - 4)\, r. \qquad (**)$$

This inequality has been proved by W. J. Blundon (Canadian Math. Bulletin 8(1965), 615–626). Moreover (**) holds if and only if the triangle is equilateral. Hence the same is true of (*).

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

Aufgabe 643. Man beweise, dass für $n \geqslant 2$ die Ebene durch ein vollständiges n-Eck in allgemeiner Lage in

$$\frac{1}{8} \cdot (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8)$$

Gebiete zerlegt wird.

A. Dreiding und P. Hohler, Zürich

1. *Lösung:* Die fragliche Anzahl von Gebieten sei mit A_n bezeichnet. Die angegebene Formel ist offenbar für $n = 2$ richtig. Wir betrachten alsdann ein vollständiges $(n + 1)$-Eck in allgemeiner Lage. Es entsteht aus dem vollständigen n-Eck $P_1, \ldots, P_n$ durch Hinzufügen des Punktes P_{n+1} und der n Geraden $P_k P_{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$. Jede dieser Geraden liefert offenbar

$$\binom{n}{2} - (n - 1)$$

neue Schnittpunkte und somit

$$\binom{n}{2} - (n - 1) + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

neue Gebiete. Das ergibt zunächst einen Gesamtzuwachs von

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2}$$

Gebieten, welche nicht den Eckpunkt P_{n+1} besitzen. Ferner haben wir offenbar $2n$ Gebiete mit dem gemeinsamen Eckpunkt P_{n+1}, also einen Zuwachs um $2n - 1$ Gebiete. Somit gilt

$$A_{n+1} = A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2} + 2n - 1$$

$$= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 8n - 2}{2},$$

womit sich die behauptete Formel in einfacher Weise durch Induktion ergibt.

H. Kappus, Bottmingen BL

2. *Lösung:* Durch m Geraden in allgemeiner Lage wird die Ebene in

$$s(m) = \frac{1}{2}(m^2 + m + 2)$$

Gebiete zerlegt, da $s(m+1) = s(m) + (m+1)$, $s_0 = 1$.
Von diesen $s(m)$ Gebieten sind $a(m) = 2m$ unbeschränkt und

$$j(m) = \frac{1}{2}(m^2 - 3m + 2)$$

beschränkt. Sind die m Geraden nicht in allgemeiner Lage, sondern gibt es genau r Punkte $P_1, \ldots, P_r$, durch die mehr als zwei Geraden hindurchgehen, und zwar durch P_ϱ g_ϱ Geraden ($\varrho = 1, \ldots, r$), dann wird die Ebene in

$$z = s(m) - \sum_{\varrho=1}^{r} j(g_\varrho)$$

Gebiete zerlegt.
Im speziellen Fall der Aufgabe ist

$$m = \binom{n}{2}, \quad r = n, \quad g_\varrho = n - 1,$$

also

$$z = s\left[\binom{n}{2}\right] - n j(n-1) = \frac{1}{2}\left[\binom{n}{2}^2 + \binom{n}{2} + 2\right]$$
$$- n\frac{1}{2}\left[(n-1)^2 - 3(n-1) + 2\right] = \frac{1}{8}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8).$$

H. Wimmer, Graz, Österreich

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH; zwei Lösungen), H. Frischknecht (Berneck SG), H. Harborth (Braunschweig, BRD), I. Paasche (München; zwei Lösungen), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD) und W. R. Umbach (Rottorf, BRD).

Aufgabe 644. Im Dreieck ABC sei $\beta \leqslant \gamma$, wobei B bzw. C den Scheitel von β bzw. γ bezeichnet. Wählt man $X \in \overline{AB}$ und $Y \in \overline{AC}$ so, dass $\sphericalangle XCB = \lambda\gamma$ und $\sphericalangle YBC = \lambda\beta$ mit $0 < \lambda \leqslant 1$, so gilt $CX \leqslant BY$ mit Gleichheit genau für $\beta = \gamma$. Man beweise diese Behauptung. P. Erdös, Budapest

Solution: Let us compare the angles CXB and CYB.

$$\sphericalangle CXB = \alpha + (1-\lambda)\gamma \geqslant \sphericalangle CYB = \alpha + (1-\lambda)\beta.$$

Therefore the circle passing through C, X, B will cut BY in point Z of the triangle. Now the angle in the circle standing on BZ is

$$\lambda\gamma + \sphericalangle ZCX = \lambda\gamma + \sphericalangle ZBX = \lambda\gamma + (1-\lambda)\beta \geqslant \beta.$$

This means that

$$CX \leqslant BZ \leqslant BY,$$

with equality holding if and only if $\beta = \gamma$. E. Szekeres, Sydney, Australia

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Bottmingen BL), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien), H. Meyer (Birkerød, Dänemark), K. Schuler (Rottweil, BRD), J. Steinig (Urbana, Illinois, USA) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

Aufgabe 645. Let p be a fixed prime and a, b, s, k nonnegative integers. Let $E(a, b)$ denote the largest value of k such that $p^k \mid \binom{a+b}{a}$ and let $E'(a, b)$ denote the largest value of k such that

$$p^k \mid (a+b+1)\binom{a+b}{a}.$$

Show that

$$E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) = s,$$

provided

$$0 \leqslant a < p^s; \quad 0 \leqslant b < p^s.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Lösung:

$$E = E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{a+b}{p^i}\right] - \left[\frac{a}{p^i}\right] - \left[\frac{b}{p^i}\right] + \left[\frac{2p^s - a - b - 1}{p^i}\right] - \left[\frac{p^s - a - 1}{p^i}\right] - \left[\frac{p^s - b - 1}{p^i}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\left(\left[\frac{2p^s - (a+b) - 1}{p^i}\right] + \left[\frac{a+b}{p^i}\right]\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{s-1}\left(\left[\frac{p^s - a - 1}{p^i}\right] + \left[\frac{a}{p^i}\right] + \left[\frac{p^s - b - 1}{p^i}\right] + \left[\frac{b}{p^i}\right]\right),$$

denn wegen $0 \leqq a < p^s$ und $0 \leqq b < p^s$, sowie $a + b < 2p^s$ und $2p^s - a - b - 1 \leqq 2p^s - 1$ verschwinden in der ersten Summe von $i = s + 1$ an und in der zweiten Summe von $i = s$ an alle Summanden.

Weiter ist mit $x = v p^i + r$; $0 \leqq r \leqq p^i - 1$

$$\left[\frac{\alpha p^s - x - 1}{p^i}\right] + \left[\frac{x}{p^i}\right] = \left[\frac{\alpha p^s - (v+1)p^i + p^i - (r+1)}{p^i}\right] + v$$

$$= \alpha p^{s-i} - (v+1) + \left[\frac{p^i - (r+1)}{p^i}\right] + v$$

$$= \begin{cases} p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \ldots, s-1 \text{ und } x = a, b \\ 2p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \ldots, s \text{ und } x = a + b, \end{cases}$$

denn wegen

$$0 \leqq p^i - (r+1) \leqq p^i - 1 \text{ ist } \left[\frac{p^i - (r+1)}{p^i}\right] = 0.$$

Also folgt:

$$E = \sum_{i=1}^{s-1}(2p^{s-i} - 1) + 1 - 2\sum_{i=1}^{s-1}(p^{s-i} - 1) = -(s-1) + 1 + 2(s-1) = s.$$

W.-R. Umbach, Rottorf, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn) und H. Harborth (Braunschweig, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. November 1972,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 665. Für nichtnegative ganze Zahlen n beweise man die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1 .$$

I. Paasche, München

Aufgabe 666. Sei V ein Rechts-K-Vektorraum vom Range 4. Der Verband der Unterräume von V heisst projektiver Raum vom Range 4 über K, geschrieben L(V).

(Q_4) bezeichne folgenden Schliessungssatz:
A, B, C, D seien Punkte von $L(V)$ mit $V = A \oplus B \oplus C \oplus D$. Sei $a = A + B$, $b = B + C$, $c = C + D$, $d = D + A$. P_i seien Punkte von a, Q_i seien Punkte von c für $i = 1, 2, 3$, welche von A, B, C, D verschieden sind. Gibt es dann zwei Geraden g_{12} und g_{23}, die von a, b verschieden sind, mit der Eigenschaft: g_{jk} trifft zugleich die vier Geraden b, d, $P_j + Q_k$, $P_k + Q_j$ für $(j, k) = (1, 2), (2, 3)$, so gilt für jede Gerade g_{13}, welche zugleich die Geraden b, d und $P_1 + Q_3$ trifft:

$$g_{13} \cap (P_3 + Q_1) \neq \{0\} .$$

Man beweise: Genau dann gilt in $L(V)$ der Schliessungssatz (Q_4), wenn in $L(V)$ der Satz von Pappos gilt.

(Hinweis: Eine Lösung ohne Benutzung von Koordinaten ergibt sich unter Beachtung von Aufgabe 594). A. Herzer, Wiesbaden, BRD

Aufgabe 667. Für jede reelle Zahl a sei $\| a \| := \min \{ | a - n | ; n \in Z\}$ (Z: Menge der ganzrationalen Zahlen), und g bezeichne die «goldene Zahl» $(\sqrt{5} + 1)/2$. Man beweise, dass die Reihen

$$\sum \| g^n \| , \sum \| g^{2n} \| , \sum \| g^{3n} \|$$

konvergent sind und dass für ihre Summen gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \| g^n \| = 1 , \sum_{n=0}^{\infty} \| g^{2n} \| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \| g^{3n} \| .$$

J.-P. Hornecker, Morangis, Essonne, France

Aufgabe 668. Im projektiven dreidimensionalen Raum P_3 haben drei Flächen zweiter Ordnung, Φ_1, Φ_2, Φ_3, die keine Kurve gemeinsam haben, acht Punkte gemein. Man beweise: Sind diese acht Punkte alle verschieden und liegen vier von ihnen in einer Ebene, so liegen auch die restlichen vier Punkte in einer Ebene.

H. Günther, Dresden, DDR