Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1973)

Heft: 1

Artikel: Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

Autor: Kreyszig, Erwin / Pendl, Alois

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29448

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. BOREL, *Eléments de la théorie des ensembles* (Paris 1949), Note IV.
[2] M. GARDNER, *Further mathematical diversions* (London 1970), Chapter 19.
[3] S. W. GOLOMB, *Replicating Figures on the Plane*, Math. Gaz. *48*, 403–412 (1964).
[4] D. HILBERT, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Ann. *38*, 459–460 (1891).
[5] K. KNOPP, *Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch*, Arch. Math. Phys. *26*, 103–115 (1917).
[6] G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. *36* 157–160, (1890).
[7] W. WUNDERLICH, *Irregular Curves and Functional Equations*, Ganita (Proc. Benares Math. Soc.) *5*, 215–230 (1954).
[8] W. WUNDERLICH, *Una generazione comune di diverse curve patologiche*, Atti VI Congr. U.M.I. (Napoli 1959), 426–427.

Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

1. Einleitung

Beziehungen zwischen der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie lassen sich dadurch gewinnen, dass man analytischen Funktionen $f(z)$ jeweils gewisse Flächen zuordnet, die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser «geometrischen Modelle» der betreffenden Funktionen untersucht und dabei funktionentheoretische Ergebnisse durch differentialgeometrische Begriffe ausdrückt. Brauchbar sind für diesen Zweck vor allem die Betragflächen und die Real- und Imaginärteilflächen. Einschlägige Arbeiten stammen u. a. von Ullrich [9] und seiner Schule sowie von Gackstatter [3], der die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen behandelt. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einige einfache geometrische Eigenschaften von Real- und Imaginärteilflächen, die für den genannten differentialgeometrisch-funktionentheoretischen Zusammenhang von Interesse sind.

2. Eine Abbildungseigenschaft

Einer analytischen Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ordnen wir die Realteilfläche $R(f)$, definiert durch

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, u(x, y)) , \tag{1}$$

und die Imaginärteilfläche $I(f)$, definiert durch

$$\mathbf{r}^*(x^*, y^*) = (x^*, y^*, v(x^*, y^*)), \tag{2}$$

zu. Unter Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen ergibt sich, dass beide Flächen dieselbe Gauss-Krümmung

$$K = - \frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2} \tag{3}$$

haben; vgl. [5], S. 318, und [7].

Sind zwei Flächen isometrisch, so stimmt ihre Gauss-Krümmung an entsprechenden Punkten überein. Dies ist eine notwendige Bedingung für Isometrie. Sie ist hinreichend für (lokale) Isometrie im Falle konstanter Gauss-Krümmung; vgl. [6]. Im vorliegenden Falle gilt der

Satz 1. *Die durch $x^* = x$, $y^* = y$ gegebene Abbildung der Realteilfläche* (1) *einer analytischen Funktion f auf deren Imaginärteilfläche $I(f)$ ist flächentreu. Für nicht konstantes f ist diese Abbildung weder konform noch isometrisch. Für nicht lineares f ist sie nicht geodätisch.*

Beweis. Die Flächentreue folgt aus der Gleichheit der Diskriminante der ersten Grundformen,

$$g = g^* = 1 + |f'|^2 . \tag{4}$$

Der Vergleich entsprechender Koeffizienten der ersten Grundformen ergibt, dass die Abbildung nicht isometrisch sein kann, von dem Trivialfall $f = konst$ abgesehen. Also kann sie auch nicht konform sein, denn Konformität und Flächentreue zusammen hätten Längentreue zur Folge. Wegen (4) reduziert sich das bekannte Kriterium für geodätische Abbildungen (vgl. [6], S. 236) im vorliegenden Falle einfach auf die Gleichheit entsprechender Christoffel-Symbole 2. Art

$$\Gamma_{jk}{}^m = \frac{\Gamma_{jkm}}{g} = \frac{u_{jk}\, u_m}{g}$$

mit $j, k, m = 1, 2$; hierbei bedeutet der Index 1 die Differentiation nach x und der Index 2 die nach y. Wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole und wegen der Laplace-Gleichung gibt es im vorliegenden Fall höchstens vier verschiedene $\Gamma_{jk}{}^m$. Dies liefert die Bedingungen

$$u_x\, u_{xx} = v_x\, v_{xx} , \quad u_y\, u_{xx} = v_y\, v_{xx}$$

und noch zwei weitere, die gleichwertig sind. Komplexe Zusammenfassung ergibt $f'\, f'' = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

3. Flächentreue und Cauchy-Riemann-Gleichungen

Bemerkenswerterweise gilt die in Satz 1 genannte Flächentreue nicht nur für Lösungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ der Cauchy-Riemann-Gleichungen, sondern auch noch für Lösungen eines allgemeineren Systems

$$\begin{aligned} v_x &= A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y , \\ v_y &= C(x, y)\, u_x + D(x, y)\, u_y , \end{aligned} \tag{5}$$

wenn man die Koeffizienten geeignet wählt. Wir beweisen hierzu den folgenden

Satz 2. *Es seien $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems* (5) *mit den Koeffizienten*

$$A = -D = \cos \alpha(x, y) , \quad B = C = \sin \alpha(x, y) \tag{6a}$$

[$\alpha(x, y)$ *eine beliebige stetige Funktion*] *oder mit den Koeffizienten*

$$A = D = \cos\alpha(x, y)\,, \quad -B = C = \sin\alpha(x, y)\,. \tag{6b}$$

Dann ist die Abbildung $x^* = x$, $y^* = y$ *der Flächen* $(x, y, u(x, y))$ *und* $(x^*, y^*, v(x^*, y^*))$ *flächentreu.*

Beweis. Aus (5) und der Gleichheit der Diskriminanten der ersten Grundform der beiden Flächen folgt

$$(A^2 + C^2 - 1)\, u_x^2 + 2(AB + CD)\, u_x\, u_y + (B^2 + D^2 - 1)\, u_y^2 = 0\,.$$

Dies ist erfüllt für

$$A^2 + C^2 = 1\,, \quad AB + CD = 0\,, \quad B^2 + D^2 = 1\,.$$

Der ersten und der letzten dieser drei Bedingungen genügen wir, indem wir

$$A + i\,C = e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad B + i\,D = e^{i\beta}$$

setzen. Die zweite Bedingung liefert dann

$$\beta = \alpha + \frac{(2\,n + 1)\,\pi}{2}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen entsprechen (6*b*) mit konstantem $\alpha = \pi/2$. Für beliebiges konstantes α und zweimal stetig differenzierbares $u(x, y)$ folgt aus (6*b*) die Laplace-Gleichung, dagegen aus (6*a*) die Gleichung

$$k_1\, u_{xx} - 2\,k_2\, u_{xy} - k_1\, u_{yy} = 0 \quad (k_1 = \sin\alpha,\ k_2 = \cos\alpha)\,.$$

4. Paare analytischer Funktionen

Es liegt nahe, Paare analytischer Funktionen f und h zu betrachten, für die die Realteilflächen $R(f)$ und $R(h)$ dieselbe Gauss-Krümmung $K(f)$ bzw. $K(h)$ haben. R. Jerrard [4] bemerkte, dass letzteres zutrifft, wenn $f'(z)\, h'(z) = 1$ ist. Wesentlich allgemeiner ist der folgende

Satz 3. *Es seien f und h analytische Funktionen, die in einem Gebiet D der komplexen Ebene definiert sind und deren Ableitungen durch eine Möbiustransformation verbunden sind. Dann gilt: Die zugehörigen Realteilflächen $R(f)$ und $R(h)$ haben in jedem Punkt von D dieselbe Gauss-Krümmung $K(f)$ bzw. $K(h)$ dann und nur dann, wenn die genannte Transformation die Form*

$$h'(z) = \frac{a\,f'(z) + b}{-\bar{b}\,f'(z) + \bar{a}} \qquad (|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 > 0) \tag{7}$$

besitzt.

Beweis. Wegen (3) muss

$$\frac{|\,\psi'\,|}{1 + |\,\psi\,|^2} = \frac{|\,\varphi'\,|}{1 + |\,\varphi\,|^2} \tag{8}$$

mit $\varphi(z) = f'(z)$ und $\psi(z) = h'(z)$ gelten. Setzen wir

$$\psi = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} \qquad (a d - b c \neq 0)$$

in (8) ein, so erhalten wir die Bedingungen

$$|a d - b c| = |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2, \quad c\bar{d} + a\bar{b} = 0.$$

Hieraus ergibt sich (7).

Dieser Satz umfasst Jerrards Ergebnis als Sonderfall. Interessanterweise sind die Transformationen (7) genau diejenigen, die den Rotationen der zu der φ-Ebene gehörigen Riemannschen Zahlensphäre entsprechen. Das leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die Gruppe der Transformationen (7) die Bewegungsgruppe der sphärischen Geometrie mit den «Geraden»

$$\gamma |\varphi|^2 + \bar{c}\varphi + c\bar{\varphi} - \gamma = 0, \quad c\bar{c} + \gamma^2 > 0$$

und dem Linienelement

$$ds_0 = \frac{|d\varphi|}{1 + |\varphi|^2} = \sqrt{-K(f)}\ |dz|$$

ist. Diese Transformationen lassen den chordalen Abstand

$$\chi(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{\sqrt{1 + |\varphi(z_1)|^2}\sqrt{1 + |\varphi(z_2)|^2}}$$

invariant; vgl. z.B. [2].

Den chordalen Abstand benutzt man u. a. im Zusammenhang mit normalen Familien holomorpher und meromorpher Funktionen. Jerrard [4] bemerkte, dass Martys Kriterium für Normalität (vgl. [8] und auch [1], S. 218) sich nun unter Benutzung der Gauss-Krümmung formulieren lässt. Dies ist ein Beispiel dafür, dass funktionentheoretische Ergebnisse manchmal in einfacher Weise durch differentialgeometrische Begriffe ausgedrückt werden können.

Erwin Kreyszig und Alois Pendl, Universität Karlsruhe

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, 2nd ed. (New York 1966).
[2] H. BEHNKE und F. SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 3. Aufl. (Berlin 1965).
[3] F. GACKSTATTER, *Zur Theorie der meromorphen und algebroiden Funktionen*, Diss. (Würzburg 1969).
[4] R. JERRARD, *Curvatures of Surfaces Associated with Holomorphic Functions*, Coll. Math. *21*, 127–132 (1970).
[5] E. KREYSZIG, *Differential Geometry*, revised ed. (Toronto 1964).
[6] E. KREYSZIG, *Differentialgeometrie*, 2. Aufl. (Leipzig 1968).
[7] E. KREYSZIG, *Die Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen*, El. Math. *24*, 25–31 (1969).
[8] F. MARTY, *Recherches sur la repartition des valeurs d'une fonction méromorphe*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) *23*, 183–261 (1931).
[9] E. ULLRICH, *Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten*, Math. Z. *54*, 297–328 (1951).