Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 1

PDF erstellt am: **13.09.2024**

For $m = 1$ we get the following pyramidal number of order 4 which is pseudoprime.

$$P_4^{91625968981} = \frac{2^{37}+1}{3}\,\frac{2^{38}-1}{3}\,\frac{2^{39}+1}{9}$$

$$= 1777 \cdot 2731 \cdot 174763 \cdot 524287 \cdot 22366891 \cdot 25781083\,.$$

Further pyramidal numbers of order 4 which are at the same time pseudoprimes are obtained for $m = 15, 16, 45$.

There exist exactly 17 even numbers m less than 1333 for which each of the numbers $12m + 1$, $18m + 1$ and $36m + 1$ is a prime.

These are $m = 16, 56, 176, 206, 346, 350, 380, 470, 506, 540, 680, 710, 786, 946, 1156, 1200$ and 1326.

From the hypothesis H of A. Schinzel (see [3]) it follows that there exist infinitely many natural numbers m for which each of the numbers $12m + 1$, $18m + 1$ and $36m + 1$ is a prime.

Thus from our Theorem it follows

Corrollary. *From the hypothesis H of A. Schinzel concerning primes it follows that there exist infinitely many pyramidal numbers of order* 4 *which are at the same time pseudoprime numbers.*

A. Rotkiewicz, Warszawa

REFERENCES

[1] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, El. Math. *19*, 82–83 (1964).

[2] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers pentagonaux*, Bull. Soc. Sci. Liège *33*, 261–263 (1964).

[3] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. *4*, 185–208 (1958).

Aufgaben

Aufgabe 662. Die untenstehenden Figuren stellen ein 8×4 Boss Puzzle dar, wobei die 31 Zahlentäfelchen einmal in natürlicher, einmal in umgekehrter Anordnung stehen. Es seien m, n natürliche Zahlen ≥ 2. Man zeige, dass beim $m \times n$-Boss Puzzle die natürliche Anordnung durch Verschieben von Zahlentäfelchen genau dann in die umgekehrte Anordnung übergeführt werden kann, wenn gilt: $m\,n \equiv 1$ oder $m\,n \equiv 2 \pmod 4$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	

31	30	29	28
27	26	25	24
23	22	21	20
19	18	17	16
15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

A. Herzer, Wiesbaden

Lösung: Die Überführung einer Anordnung der k Täfelchen des Boss Puzzle in eine andere ist genau dann möglich, wenn $k - l$ gerade ist, wobei l die Anzahl der Zyklen (Vertauschungskreise) der wirkenden Permutation bedeutet; das leere Feld muss bei beiden Anordnungen an der gleichen Stelle liegen. (Vgl. H. Schubert, Mathematische Mussestunden, Abschnitt über das Boss Puzzle). Im gegebenen Beispiel lauten die Zyklen

$$(1, m\,n - 1)\,, \qquad (2, m\,n - 2)\,, \;\ldots,$$

und es gilt daher $l = [m\,n/2]$. Weil $m\,n - 1 - [m\,n/2] \equiv 0 \pmod 2$ genau dann, wenn $mn \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$, so ist die Aufgabe gelöst.

O. P. Lossers, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Hohler (Olten) und W. R. Umbach (Rottorf, BRD).

Anmerkung der Redaktion: Der interessierte Leser sei noch auf den Artikel H. Liebeck, Some generalizations of the 14–15 puzzle, Mathematics Magazine *44* (1971) 185–189, aufmerksam gemacht.

Aufgabe 663. Let P be a point in the interior of the triangle ABC. Let R_1, R_2, R_3 denote the distances AP, BP, CP and let w_1, w_2, w_3 denote the bisectors of the angles BPC, CPA, APB. Show that

$$R_1\,w_1^2 + R_2\,w_2^2 + R_3\,w_3^2 + 12\,w_1\,w_2\,w_3 \le \frac{9}{4}\,R_1\,R_2\,R_3\,,$$

with equality if and only if ABC is equilateral and P is the incenter.

L. Carlitz, Durham, N. C., USA

Lösung: Es seien die Winkel BPC, CPA, APB respektive $2\,\alpha_1$, $2\,\alpha_2$, $2\,\alpha_3$. Da P ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, gilt

$$0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < \frac{\pi}{2} \quad \text{sowie} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi\,.$$

Zunächst zum Dreieck BPC. Sein Flächeninhalt ist auf zweifache Weise ausdrückbar und führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{2}\,R_2\,R_3 \sin 2\,\alpha_1 = \frac{1}{2}\,R_2\,w_1 \sin\alpha_1 + \frac{1}{2}\,R_3\,w_1 \sin\alpha_1$$

d.h.

$$w_1 = \frac{2\,R_2\,R_3}{R_2 + R_3} \cos\alpha_1 \le \sqrt{R_2\,R_3} \cos\alpha_1\,. \tag{1}$$

Bei dieser Abschätzung wurde ausgenutzt, dass das harmonische Mittel zweier positiv-reeller Zahlen nicht grösser ist als ihr geometrisches Mittel (Gleichheit nur für $R_2 = R_3$).

Ganz entsprechend findet man

$$w_2 \le \sqrt{R_3\,R_1} \cos\alpha_2\,, \qquad w_3 \le \sqrt{R_1\,R_2} \cos\alpha_3\,. \tag{2}$$

Der Ausdruck

$$S = R_1\,w_1^2 + R_2\,w_2^2 + R_3\,w_3^2 + 12\,w_1\,w_2\,w_3$$

lässt sich jetzt vermöge (1) und (2) und unter Verwendung der für $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ geltenden Identität

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3$$

abschätzen zu

$$S \leq R_1 R_2 R_3 (1 + 10\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3) \tag{3}$$

(Gleichheit genau für $R_1 = R_2 = R_3$). Nun ist unter den obigen Einschränkungen bezüglich α_1, α_2, α_3 leicht zu zeigen: $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \leq 1/8$ mit Gleichheit nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$. Aus (3) folgt damit

$$S \leq \frac{9}{4} R_1 R_2 R_3 .$$

Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}, \qquad R_1 = R_2 = R_3 ,$$

d.h., wenn der innere Punkt P Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ist, q.e.d.

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), H. Kappus (Rodersdorf, SO), F. Leuenberger (Feldmeilen, ZH), P. Nüesch (Lausanne) und J. Schopp (Budapest).

Anmerkung der Redaktion: Mit gleichartigen Schlüssen beweist J. Schopp etwas allgemeiner

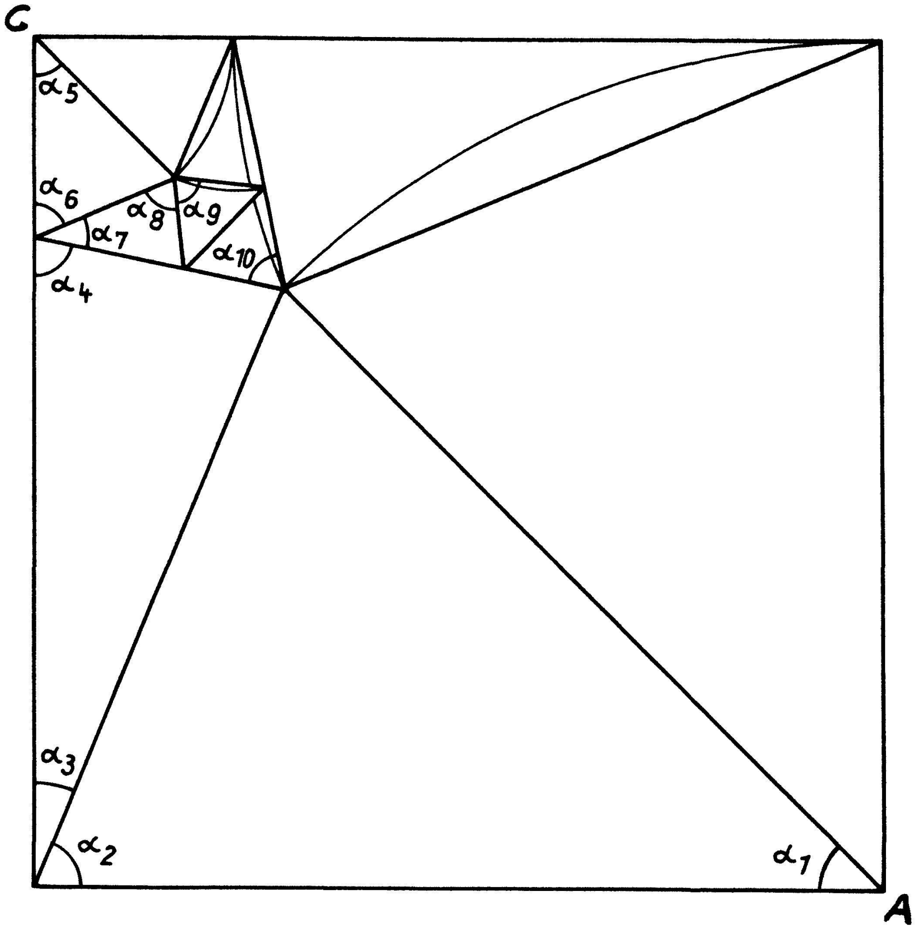
$$\sum_{i=1}^{3} R_i w_i^2 + (2+\lambda) \prod_{i=1}^{3} w_i \leq \frac{8+\lambda}{8} \prod_{i=1}^{3} R_i \qquad (\lambda \geq 0) .$$

Aufgabe 664. Ein Quadrat ist in gleichschenklig spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte zu zerlegen.

Anmerkung: Fordert man die Zerlegung eines Quadrates in spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte, so ist dies mit acht Dreiecken möglich (vgl. z.B. C.S. Ogilvy, Mathematische Leckerbissen, Vieweg Braunschweig 1969, p. 41, 97). Die obige Aufgabe ist mit zehn Dreiecken lösbar; die Frage nach der Minimalzahl von Dreiecken ist dagegen noch offen. E. Schröder, Dresden, DDR

Lösung: Es genügt zu beweisen, dass die konstruierten gleichschenkligen Dreiecke einen spitzen Winkel an der Spitze aufweisen. Die Konstruktion verläuft symmetrisch zur Diagonalen AC. Die Reihenfolge der einzelnen Schritte ist in der Figur durch die Numierung der sukzessive entstehenden Winkel angedeutet. Ihre Masse lauten: $\alpha_1 = 45°, \alpha_2 = 67{,}5°, \alpha_3 = 22{,}5°, \alpha_4 = 78{,}75°, \alpha_5 = 45°, \alpha_6 = 67{,}5°, \alpha_7 = 33{,}75°, \alpha_8 = 73{,}125°$, $\alpha_9 = 78{,}75°$, $\alpha_{10} = 67{,}5°$. L. Kieffer, Luxembourg

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn) und E. Pethes/J. Schopp (Budapest).



Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. August 1973**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 664 A (Band 27, p. 19), Problem 672 A (Band 27, p. 68).

Aufgabe 685. Die Zahlenfolge (a_n), $n = 1, 2, \ldots$, ist dadurch definiert, dass $a_1, \ldots, a_r$ $(r \in N)$ beliebig gegebene positive reelle Zahlen sind und dass a_n für alle $n > r$ das Potenzmittel x-ter Ordnung $(x \in R)$ der Zahlen $a_{n-1}, \ldots, a_{n-r}$ ist. Man beweise: $\lim a_n$ $(n \to \infty)$ existiert und ist

$$\left[\sum_{i=1}^{r} i a_i^x \Big/ \binom{r+1}{2}\right]^{1/x}, \quad \text{falls} \quad x \neq 0,$$

$$\left[\prod_{i=1}^{r} a_i^i\right]^{1/\binom{r+1}{2}}, \quad \text{falls} \quad x = 0.$$

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Aufgabe 686. Es liegen n Münzen $M_1, \ldots, M_n$ in einer Reihe. Diese sollen nach folgender Vorschrift gepaart werden: Man nehme eine Münze, überspringe (nach rechts oder nach links) s Münzen und lege sie auf die nächstfolgende; die Existenz einer solchen wird ausdrücklich verlangt. Dann nehme man eine weitere noch ungepaarte Münze und verfahre damit in der gleichen Weise usw. Ein Paar zählt für das Überspringen immer als zwei Münzen.

Für $n = 10$ und $s = 2$ ergibt sich eine vollständige Paarung z.B. wie folgt: M_5 auf M_2, M_7 auf M_{10}, M_3 auf M_8, M_9 auf M_6, M_1 auf M_4.

Für welche Wertepaare $(n, s) \in N \times N$ ist eine vollständige Paarung möglich?

P. Hohler, Olten

Aufgabe 687. Es seien in der Ebene drei voneinander verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 und ein Dreieck ABC vorgegeben. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal ein zu ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ derart, dass seine drei Eckpunkte auf den drei gegebenen Geraden liegen.

S. Grabiak, Oberursel, BRD

Aufgabe 688. s, R bzw. r bezeichnen den halben Umfang, den Umkreisradius bzw. den Inkreisradius eines Dreiecks. Man beweise, dass eine Ungleichung von O. Kooi zu

$$\frac{2r(4R+r)^2}{2R-r} \leq 2s^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2R-r} \tag{1}$$

erweitert werden kann und dass dasselbe für eine andere (wohlbekannte) Ungleichung zu

$$s\sqrt{3} \leq 4R + r \leq s\left(\frac{R+r}{r}\right)^{1/2} \tag{2}$$

möglich ist. Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Literaturüberschau

Beiträge zur Graphentheorie, vorgetragen auf dem internationalen Kolloquium in Manebach (DDR) vom 9. bis 12. Mai 1967. Herausgegeben von Horst Sachs, Heinz-Jürgen Voss und Hans-Joachim Walther. 394 Seiten. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968.

Der in Form eines Buches herausgegebene Bericht informiert in einheitlicher und sorgfältiger Darstellung nicht nur über die am Kolloquium gehaltenen Referate, er vermittelt auch einen repräsentativen Querschnitt durch die graphentheoretische Forschung der sechziger Jahre. Ebenso spiegelt sich in den insgesamt 29 deutsch oder englisch abgefassten Artikeln die Vielfalt dieser Forschung, werden doch gleichermassen topologische und kombinatorische Fragen neben Färbungs- und Extremalproblemen behandelt. Manche der vorgetragenen Ergebnisse haben inzwischen schon Eingang in die neuere Literatur gefunden, wie beispielsweise die Untersuchungen von L. W. Beineke über derivierte Graphen, diejenigen von G. Ringel über das Geschlecht des vollständigen Graphen oder der von Kozyrev und Grinberg angegebene nichthamiltonsche kubische