

Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Autor(en): **Herz, B. / Kaapke, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29452>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dann ist $V(T_q) = q^{n-1} F(T_q) = 2q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}$

und $W_\nu(T_q) = 0$ (q^{n-2}) für $\nu = 2, \dots, n$.

Wegen $G(T_q) = 0$ folgt daraus mit $q \rightarrow \infty$: $2b_1 + b_0 \leq 0$

und mit $b_0 \leq 1$ folgt daraus $b_1 \leq -1/2$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

J. M. Wills, TU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (New York, Chelsea Publ. Co. 1948).
- [2] J. BOKOWSKI und J. M. WILLS, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im R^3* . Erscheint in Acta Math. Hung. Bd. 25.
- [3] H. GROEMER, *Eine Bemerkung über Gitterpunkte in ebenen konvexen Bereichen*, Arch. Math. 10, 62–63 (1949).
- [4] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, (Springer, Berlin 1957).
- [5] H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [6] H. HADWIGER, *Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt*. Math. Z. 116, 191–196 (1970).
- [7] L. K. HUA, *Abschätzungen von Exponentialsummen*, Enzyklopädie Math. Wiss. Bd. I, 2, 29 (Teubner, Leipzig 1959).
- [8] S. KRUPIZKA, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen konvexen Körpern*, Czechoslovak Math. J. 7 (82) 550–552 (1957).
- [9] M. NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloq. math. 1, 305–311 (1947).
- [10] J. E. REEVE, *On the Volume of Lattice Polyhedra*. Proc. Lond. math. Soc. (3) 7, 378–395 (1957).
- [11] J. E. REEVE, *A Further Note on the Volume of Lattice Polyhedra*. J. Lond. math. Soc. 34, 57–62 (1959).
- [12] WARMUS, *Kurzmitteilung*. Colloq. math. 1, 45–46 (1947).

Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Als Variante des klassischen isoperimetrischen Problems bestimmt Besicovitch in [1] u. a. solche konvexen Bereiche des euklidischen R^2 , welche in einem gegebenen kompakten konvexen Bereich K enthalten sind und bei vorgegebenem Umfang F maximalen Flächeninhalt V liefern. Es zeigt sich, dass dabei die inneren ϱ -Hüllen K^ϱ , $\varrho \in [0, r]$, $r =$ Inkugelradius von K , d. s. die abgeschlossenen Hüllen der Vereinigungen aller in K enthaltenen Kugeln vom Radius ϱ , eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Wir interessieren uns in dieser Note für folgendes verwandte Problem im R^n , $n \geq 2$:

Ist P ein konvexes Tangentialpolyeder an seine Inkugel S_r , $r > 0$, also $V(P)/F(P) = V(S_r)/F(S_r) = r/n$, so suchen wir das (nach dem Auswahlprinzip sicher existierende) $\max V(\Gamma)/F(\Gamma) \mid \Gamma$ konvex, $S_r \subset \Gamma \subset P$ und die zugehörigen Extremalkörper.

Im R^2 lautet das Ergebnis

$$\frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \leq \frac{V(P^{\varrho_0})}{F(P^{\varrho_0})} = \varrho_0 = \frac{[r V(P) - r^2 \sqrt{\pi} V(P)]}{[V(P) - \pi r^2]} \quad (1)$$

und Gleichheit gilt nur für $\Gamma = P^{\varrho_0}$.

Für $n > 2$ ist das Problem noch offen, fest steht aber, dass i. a. die inneren Hüllen P^ϱ dann nicht mehr Extremalkörper sind, wie ein Beispiel¹⁾ am Ende dieser Note zeigt.

Beweis von (1):²⁾ Sei Γ_0 ein Extremalbereich im Sinne der Aufgabenstellung und $V(\Gamma_0)/F(\Gamma_0) = P_0$. Offensichtlich ist $F(\Gamma_0) \geq 2\pi r$. Nun gibt es zum fest vorgeschriebenen $F = F(\Gamma_0)$ einen isoperimetrischen Eibereich K_0 , $K_0 \subset P$, $F(K_0) = F(\Gamma_0)$ derart, dass $V(K_0)$ den grösstmöglichen Wert von V repräsentiert. Also wird (a) $P_0 \leq V(K_0)/F(K_0)$.

Nach Besicovitch ([1], Variant III, S. 45 ff.) ist aber K_0 eine innere ϱ -Hülle P^ϱ , und es gilt demnach $S_r \subset K_0 \subset P$ und somit auch (b) $p_0 \geq V(K_0)/F(K_0)$. Demnach ist $p_0 = V(K_0)/F(K_0)$.

Setzt man $f(\varrho) = V(P^\varrho)/F(P^\varrho)$, so ist offenbar p_0 das Maximum von $f(\varrho)$ im Intervall $[0, r]$. Sind V, F die Masszahlen von P , $rF = 2V$, so ergibt sich

$$f(\varrho) = \frac{[V(r^2 - \varrho^2) + \pi r^2 \varrho^2]}{r[F(r - \varrho)\varrho] + 2\pi r},$$

eine in $[0, r]$ konkave Funktion, und nach elementarer Ausrechnung die rechte Seite von (1).

Im R^3 seien P_m , $m = 3, 4, 5 \dots$ gerade Zylinder mit der Höhe $h = 2$ und regelmässigen m -Ecken mit Inkreisradius $r = 1$ als Grundfläche. Also P_m Tangentialpolyeder an die Einheitskugel S und im Sinne der Blaschkeschen Metrik $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = T$, wobei T ein gerader Kreiszyylinder mit $r = 1$ und $h = 2$ ist. Wäre wie im R^2 für jedes m eine innere ϱ -Hülle $P_m^{\varrho(m)}$, $\varrho(m) \in [0, 1]$, von P_m Extremalkörper im Sinne unserer Fragestellung, so gäbe es eine Teilfolge m_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho(m_\nu) = \varrho_0$, $\varrho_0 \in [0, 1]$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{m_\nu}^{\varrho(m_\nu)} = T^{\varrho_0}$, und es müsste gelten

$$\frac{V(T^{\varrho_0})}{F(T^{\varrho_0})} \geq \frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \quad \text{für jedes konvexe } \Gamma \text{ mit } S \subset \Gamma \subset T. \quad (2)$$

(2) gilt jedoch für kein $\varrho_0 \in [0, 1]$, wie wir im folgenden zeigen werden.

- a) Es ist $V(T^0)/F(T^0) = V(T^1)/F(T^1) = 1/3$, und eine leichte Rechnung zeigt $d/d\varrho [V(T^\varrho)/F(T^\varrho)]|_{\varrho=0} > 0$.
- b) Sei $\Gamma_{\varrho,\lambda}$, $\varrho \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, 1/\varrho)$, der konvexe Körper, den man durch affine λ -Dilatation von T^ϱ in Richtung seiner Symmetrieachse und anschliessender Verkürzung des zylindrischen Anteils um die Länge $2(\lambda - 1)$ erhält. Evident ist $S \subset \Gamma_{\varrho,\lambda} \subset T$ und $\Gamma_{\varrho,1} = T^\varrho$. Wir bezeichnen $F_{\varrho}' = \partial/\partial \varrho [F(\Gamma_{\varrho,\lambda})]|_{\lambda=1}$, $F_{\lambda}' = \partial/\partial \lambda [F(\Gamma_{\varrho,\lambda})]|_{\lambda=1}$ und analog V_{ϱ}' , V_{λ}' .

1) Dieses Beispiel wurde den Verfassern von H. Hadwiger zur genaueren Untersuchung vorgeschlagen.

2) Dieser Beweis wurde den Verfassern von H. Hadwiger mitgeteilt, nachdem sie einen elementaren aber längeren Beweis, der sich nicht auf das Ergebnis von Besicovitch stützte, vorgelegt hatten.

Eine etwas längere Rechnung ergibt dann

$$D = \begin{vmatrix} F'_e & V'_e \\ F'_\lambda & V'_\lambda \end{vmatrix} = \frac{\pi^2 \varrho^3}{3} [-3\pi^2 + 22\pi - 40] (1 - \varrho) \neq 0 \quad \text{für } \varrho \in (0, 1).$$

Also gibt es zu jedem T^e , $\varrho \in (0, 1)$ ein $\Gamma_{e,\lambda}$ mit $V(T^e)/F(T^e) < V(\Gamma_{e,\lambda})/F(\Gamma_{e,\lambda})$.

B. Herz und J. Kaapke, TU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Variants of a Classical Isoperimetric Problem*, Quart. J. Math. Oxford, [II. Serie], 3, 42-49 (1952).

Kleine Mitteilungen

Über einige elementare Abschätzungen von e

In einer früheren kleinen Note [1] wurde die Zahl e durch einfache Ausdrücke nach unten und nach oben abgeschätzt. Diese Schranken sollen jetzt weiter verbessert werden.

Satz 1. Für $x > 0$ gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5-1/8x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}} < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x+1/12}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Damit erhalten wir

$$\exp((x^2+x)^{-0,5}) > 1 + (x^2+x)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{6} (x^2+x)^{-1,5} > 1 + \frac{1}{x},$$

weil

$$(x^2+x)^{-0,5} \cdot \frac{6x^2+6x+1}{6x^2+6x} > \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)}$$

wegen $48x^2 + 12x + 1 > 45x^2 + 9x$ richtig ist.

Ist

$$x \geq 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} > 0$$

und

$$\left(x + 0,5 - \frac{1}{8x}\right)^2 = x^2 + x - \frac{1}{8x} \left(1 - \frac{1}{8x}\right) < x^2 + x;$$

ist

$$0 < x < 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} < x < \sqrt{x^2+x}.$$