Wir zeigen weiter:

Ist R endlich und gilt (1), so ist R nil.

Sei $r \in R$. Da R endlich ist, sind nicht alle Potenzen r^i mit $i \in N$ voneinander verschieden. Also gibt es $n, m \in N$ mit $m > n$, so dass

$$r^{m-n}\, r^n = r^m = r^n \,.$$

Es folgt

$$\left(r^{m-n}\right)^{j+1} r^n = \left(r^{m-n}\right)^{j} r^n$$

für alle $j \in N$ und hiermit weiter

$$\left(r^{m-n}\right)^{n} r^n = r^n \,.$$

Somit ist

$$\left(r^{n}\right)^{m-n+1} = \left(r^{n}\right)^{m-n} r^n = \left(r^{m-n}\right)^{n} r^n = r^n \,.$$

Nach (1) folgt hieraus $r^n = 0$. Demnach ist ein endlicher Ring R nil, wenn 0 das einzige idempotente Element von R ist.

Walter Streb, Pegnitz BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. Levitzki, *Solution of a Problem of G. Koethe*, Amer. J. Math. *67*, 437–442.

[2] B. L. van der Waerden, *Algebra, zweiter Teil*, (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959).

Aufgaben

Aufgabe 669. Es bedeute W einen Einheitswürfel der Kantenlänge 1 im n-dimensionalen euklidischen Raum R mit dem Ursprung $0 \in R$ als Mittelpunkt. Der Einheitsvektor u kennzeichne eine Richtung in R. Das planare statische Moment von W bezüglich der durch den Ursprung 0 gehenden zu u orthogonalen Ebene $\langle x, u\rangle = 0$ kann durch das sich über W erstreckende Integral

$$T_u = \int^{W} |\langle x, u\rangle|\, dx \tag{*}$$

dargestellt werden, wobei x den Ortsvektor eines in W variablen Punktes x und dx das Volumdifferential an der Stelle x anzeigen. Wie weiter oben soll die Eckklammer die Bildung des skalaren Produkts vorschreiben. – Es ist nachzuweisen, dass für alle $n \geq 1$ und alle Richtungen u die Ungleichung

$$T_u \leq \frac{1}{4}$$

gilt. Wie unmittelbar ersichtlich, gilt Gleichheit für jede der $2n$ Kantenrichtungen von W.

H. Hadwiger, Bern

Lösung: Die Aufgabe lässt sich so umformulieren:

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, auf dem Intervall $[-1/2, +1/2]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sei ein reeller Vektor mit $\|\alpha\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$, und Y sei die Zufallsvariable $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$. Dann gilt $E(|Y|) \leq \frac{1}{4} \|\alpha\|$.

Beweis: Die Variable Y besitzt eine Dichtefunktion $f(y) = f_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(y)$, die in y gerade und für $y \geq 0$ nichtwachsend ist. Das beweist man leicht durch vollständige Induktion über n mit Hilfe der Formel:

$$f_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(y) = \frac{1}{|\alpha_n|} \int_{y-|\alpha_n|/2}^{y+|\alpha_n|/2} f_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}}(z)\, dz\,. \tag{1}$$

Es gibt also auf R^+ ein positives Mass μ mit $d\mu(x) = -df(x)$. Für die absoluten Momente $a_k = E(|Y|^k)$ erhält man durch partielle Integration:

$$\left.\begin{aligned} a_k = 2\int_0^\infty y^k f(y)\, dy &= \frac{2\, y^{k+1}}{k+1} f(y) \Big|_0^\infty - \frac{2}{k+1} \int_0^\infty y^{k+1}\, df(y) \\ &= \frac{2}{k+1} \int_0^\infty y^{k+1}\, d\mu(y)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aus der Schwarz'schen Ungleichung

$$\int_0^\infty y^2\, d\mu(y) = \int_0^\infty y^{1/2} y^{3/2}\, d\mu(y) \leq \left[\int_0^\infty y\, d\mu(y) \int_0^\infty y^3\, d\mu(y)\right]^{1/2} \tag{3}$$

folgt daher

$$a_1 \leq \left[\frac{1}{2} a_0 \frac{3}{2} a_2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Nun ist $a_0 = E(|Y|^0) = 1$ und

$$a_2 = E(Y^2) = \sum \alpha_i \alpha_j E(X_i X_j) = \frac{1}{12} \sum \alpha_i^2 = \frac{1}{12} \|\alpha\|^2\,. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt die Behauptung. Man bekommt Gleichheit in (3), falls μ in einem Punkt konzentriert ist, d.h. wenn Y eine Gleichverteilung besitzt. Dies bedeutet, dass α Vielfaches eines Basisvektors $(0, \ldots 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ ist. H. Carnal, Bern

Anmerkung der Redaktion: Der Aufgabensteller verwendet in seiner Lösung den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor und ein diesbezügliches Resultat von G. Pólya (Berechnung eines bestimmten Integrals; Math. Ann. *74* (1913) 204–212). Für eine Anwendung von (*) vgl. H. Hadwiger, Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie, Monatshefte Math. *76* (1972) 410–418.

Aufgabe 670. N bzw. P bezeichne die Menge aller natürlichen Zahlen bzw. aller Primzahlen. Für $k, m \in N$ werde $\sigma_k(m)$ definiert durch

$$\sigma_k(m) = \sum_{d \in N, d \mid m} d^k .$$

Für jede Teilmenge M von N werde $S_k(M)$ definiert durch

$$S_k(M) = \sum_{m \in M} \frac{\sigma_k(m)}{m!} .$$

Man beweise: Ist M eine unendliche (bzw. endliche) Teilmenge von P, so ist $S_k(M)$ irrational (bzw. rational) für alle $k \in N$.

Anmerkung: Die Irrationalität von $S_k(N)$ ist für $k = 1$ und $k = 2$ bekannt (Problem 4493, Amer. Math. Monthly *60* (1953) 557–558; Problem 4518, Amer. Math. Monthly *61* (1954) 264–265). Für $k \geq 3$ ist dies eine noch unbewiesene Vermutung von P. Erdös.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br., BRD

Lösung des Aufgabenstellers: Wir zeigen zuerst, dass für jedes reelle x mit $x \geq k^2$, $k \in N$

$$1 + x^k < 3 \prod_{\varkappa=1}^{k} (x - \varkappa + 1) \tag{1}$$

gilt. Für $k = 1$ ist dies klar. Sei $k \geq 2$; dann ist

$$x^{-k} \prod_{\varkappa=1}^{k} (x - \varkappa + 1) = \prod_{\varkappa=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\varkappa}{x}\right) > \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{k-1} \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} > e^{-1} .$$

Da ausserdem für $x \geq k^2$, $k \geq 2$

$$(3 - e) \prod_{\varkappa=1}^{k} (x - \varkappa + 1) \geq (3 - e)\, k^2\, (k^2 - 1) \geq 12\, (3 - e) > 1$$

gilt, ist (1) bewiesen.

Nehmen wir an, es gäbe eine unendliche Teilmenge M von P und ein $k \in N$ derart, dass $S_k(M)$ rational und gleich a_k/b_k ist ($a_k, b_k \in N$), dass also gilt

$$a_k/b_k - \sum_{\substack{p \in M \\ p \leq B_k}} \sigma_k(p)/p! = \sum_{\substack{p \in M \\ p > B_k}} \sigma_k(p)/p! . \tag{2}$$

Dabei ist $B_k = (k^2 + b_k)! + 1$ gesetzt. Da jede der Zahlen $B_k + j$ $(1 \leq j \leq k)$ zusammengesetzt ist, folgt aus $p \in M$, $p > B_k$ sofort: $p \in M$, $p \geq B_k + k + 1$. Wegen (2) und der Definition von B_k ist

$$B_k! \sum_{\substack{p \in M \\ p \geq B_k + k + 1}} \sigma_k(p)/p! \in N ;$$

hiermit sowie wegen $\sigma_k(p) = p^k + 1$ und (1) gilt

$$1 < 3\, B_k! \sum_{\substack{p \in M \\ p \geq B_k + k + 1}} 1/(p - k)! < \frac{3}{B_k + 1} \sum_{t=0}^{\infty} (B_k + 2)^{-t} = 3\, (B_k + 2)\, (B_k + 1)^{-2} .$$

Wegen $B_k \geq 3$ ist die rechte Seite $\leq 15/16$. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung vollständig; denn für endliche M ist die Rationalität von $S_k(M)$ für alle $k \in N$ trivial.

Aufgabe 671. Man zeige, dass in jedem Dreieck für die Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + \left(\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2}\right) \geq 4$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. A. Bager, Hjørring, Dänemark

Solution: Since $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + (r/R)$ and

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(4R+r)^2}{s^2} - 2\,,$$

the stated inequality may be written

$$\left[\frac{(4R+r)^2}{s^2} - 2\right] + \left[2 + \frac{2r}{R}\right] \geqq 4$$

or

$$R(4R+r)^2 \geqq 2s^2(2R-r)\,. \tag{1}$$

By (5.7) of O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969, this inequality was proved by O. Kooi, Simon Stevin, *32* (1958), 97–101.

L. Bankoff, Los Angeles, California, USA.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Kappus (Rodersdorf SO), P. Nüesch (Lausanne) und I. Paasche (München; zwei Lösungen).

Anmerkungen: 1. By L. Carlitz: Bager has proved (Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, série: mathématiques et physique, no. 339 (1971) 5–25) the inequality (p. 21)

$$s^2 \leq \frac{R^2(2R+r)^2}{R^2 - (8/27)r^2} \tag{2}$$

with equality only when $R = 2r$. It follows from (2) that

$$\begin{aligned} 2(2R-r)(27R^2-8r^2)s^2 &\leq 54(2R-r)R^2(2R+r)^2 \\ &= 54R^2(8R^3+4R^2r-2Rr^2-r^3) \\ &= R(4R+r)^2(27R^2-8r^2) - Rr^2(7R^2-10Rr-8r^2) \\ &= R(4R+r)^2(27R^2-8r^2) - Rr^2(R-2r)(7R+4r)\,. \end{aligned}$$

This evidently proves (1).

Inequality (1) is stronger than the known inequality

$$s^2 \leq 3r^2 + 4Rr + 4R^2\,. \tag{3}$$

Thus we have the following chain of implications

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)\,.$$

2. P. Nüesch formt die zu beweisende Ungleichung um auf

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha/2)} + \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\beta/2)} + \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2(\gamma/2)} \geq 1,$$

die sodann mit einer Konvexitätsbetrachtung hergeleitet wird.

3. I. Paasche verwendet die Steinersche Hypozykloide [vgl. etwa O. Bottema, Inequalities for R, r and s, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, no. 340 (1971) 27–36].

Aufgabe 672. Man zeige, dass in jedem Dreieck für die Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma \leq (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung: Mit $\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma = (a^3 + b^3 + c^3)/8\,R^3 = [8\,s^3 - 6\,s\,(a\,b + b\,c + c\,a) + 3\,a\,b\,c]/8\,R^3 = [8\,s^3 - 6\,s\,(s^2 + 4\,R\,r + r^2) + 12\,s\,R\,r]/8\,R^3 = s\,(s^2 - 6\,R\,r - 3\,r^2)/4\,R^3$, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = s/R$ und $\sin^2(\alpha/2) + \sin^2(\beta/2) + \sin^2(\gamma/2) = (2\,R - r)/2\,R$ lässt sich die Behauptung äquivalent umformen zu $s^2 \leq 4\,R^2 + 4\,R\,r + 3\,r^2$. In dieser bekannten Ungleichung (vgl. (3) in der Anmerkung 1 zu Aufgabe 671) steht das Gleichheitszeichen genau für das gleichseitige Dreieck. H. Frischknecht, Berneck SG

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, Cal., USA), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Kappus (Rodersdorf SO), M. Majić (Zagreb und Stuttgart), I. Paasche (München, BRD) und R. Rose (Biel).

Anmerkung der Redaktion: P. Nüesch (Lausanne) formt die Behauptung um auf

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq \frac{2\,(a^3 + b^3 + c^3)}{a\,b\,c}$$

und bringt diese Ungleichung mit der von I. Paasche stammenden Verschärfung der Aufgabe 622 [El. Math. *26* (1971), p. 64/65] in Verbindung. Er erhält so unter anderem die Ungleichung

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$$

[vgl. Bottema-Djordević-Janić-Mitrinović-Vasić, Geometric Inequalities, Groningen 1969, p. 21, (2.14)].

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Dezember 1973,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 693. Es seien A ein offenes Intervall der reellen Zahlengeraden und f, g zwei auf A definierte differenzierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \neq \pm 1$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ für alle x in A. Man zeige, dass die durch

$$F(x) = {}^{|f(x)|}\log |g(x)| \qquad [x \in A]$$

definierte Funktion F differenzierbar ist und bestimme die erste Ableitung von F.

R. Rose, Biel

Aufgabe 694. Trifft man entgegen der üblichen Festsetzung $\binom{0}{0} = 1$ die Konvention $\binom{0}{0}/0 = 0$, so gilt für alle nichtnegativen ganzen Zahlen N die Darstellung

$$N = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^n n^N \sum_{m=n-1}^{N} \binom{m}{n-1} / m .$$

I. Paasche, München

Aufgabe 695. Ein Dreieck habe die Seitenlängen a, b, c mit $0 < a \leq b \leq c$. Man bestimme sämtliche Paare von Punkten P, Q auf dem Rand des Dreiecks derart, dass die Strecke PQ das Dreieck in zwei Polygone mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt zerlegt. Wie hängt die Anzahl dieser Punktepaare von a, b, c ab?

H. R. Suter, Muri bei Bern

Aufgabe 696. Für die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks sei $0 < a \leq b \leq c$. Man zeige, dass

$$4 < \frac{(a+b+c)^2}{b\,c} \leq 9 , \tag{1}$$

$$8 < \frac{(a+b+c)^2}{a\,c} < \infty , \tag{2}$$

$$9 \leq \frac{(a+b+c)^2}{a\,b} < \infty \tag{3}$$

gelten, dass die angegebenen Schranken die bestmöglichen sind, dass die Quotienten jeden Zwischenwert annehmen können, und dass in (1) und (3) das Gleichheitszeichen genau für das gleichseitige Dreieck steht.

J. Rätz, Bern

Literaturüberschau

Introduction to Numerical Analysis and Applications. Von DONALD GREENSPAN. IX, 182 Seiten. $9.50. Markham, Chicago 1970.

Das vorliegende Buch beschreibt einige klassische Methoden zur numerischen Behandlung fundamentaler Probleme der Algebra und Analysis. Voraussetzungen für den Leser sind Kenntnisse der Grundbegriffe in der linearen Algebra sowie in der Differential- und Integralrechnung.

Im ersten Kapitel werden die Interpolation einer diskreten Funktion durch Polynome beliebigen Grades und die Methoden der kleinsten Quadrate besprochen, im zweiten Näherungsmethoden (darunter die Simpsonsche Regel) für die Berechnung des bestimmten Integrals und der Ableitung, im dritten Algorithmen zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen mit besonderen Eigenschaften (tridiagonale und diagonale dominante Systeme) sowie das verallgemeinerte Newtonsche