Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1973)
Heft: 5

Artikel: Über eine Bemerkung J. Steiners
Autor: Böhm, Wolfgang
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29461

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

verbessern, denn spätestens nach m Schritten hat sie den ihr liebsten der $m+1$ Herren erreicht. Total sind also höchstens m^2 Schritte möglich. Also müssen wir einmal in Fall 1 kommen!

C. Bemerkungen

Der Prozess funktioniert auch, wenn mehr Damen als Herren vorhanden sind· Es bleiben nach (II) nur Damen übrig, die die gebildeten Paare nicht stören.

Bei unendlich vielen Teilnehmern braucht das Verfahren nicht anwendbar zu sein, obwohl es Kombinationen ohne gefährdete Paare gibt. (Beispiel: Jeder Teilnehmer möchte einen Partner mit möglichst hoher Nummer; die Kombination (H_1, D_1), (H_2, D_2), . . . , (H_k, D_k), . . . enthält keine gefährdeten Paare). Andererseits kann man sich bei unendlich vielen Teilnehmern Systeme von Präferenzlisten vorstellen, für die die Induktion durchführbar ist, bei denen es aber unmöglich ist, alle Teilnehmer in einer Kombination ohne gefährdete Paare unterzubringen. (Beispiel: Die Herren möchten Partnerinnen mit möglichst kleiner Nummer, die Damen wünschen sich Herren mit möglichst hohen Nummern. Man sieht leicht, dass es keine unendliche Kombination ohne gefährdete Paare geben kann: Wir nehmen an, (H_i, D_k) und (H_j, D_m) seien zwei Paare einer Kombination ohne gefährdete Paare. Für $j < i$ gibt es höchstens $i-1$ Möglichkeiten; ist $j > i$, dann muss $m < k$ sein, sonst würden H_j und D_k wechseln. Also kommen höchstens $i+k-1$ Paare vor.)

Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Verfahrens bei abzählbar unendlich vielen Teilnehmern ist

a) Die Listen der Herren haben ein zu der Menge der natürlichen Zahlen ordnungsisomorphes Anfangsstück und

b) Die Listen der Damen sind wohlgeordnet.

Bedingung a) ermöglicht die Bildung der Paare, Bedingung b) garantiert eine Art «Konvergenz»: Die Menge aller Herren, die eine Dame je als Partner gehabt hat, hat ein erstes Element bezüglich ihrer Liste. Dieser Herr wurde ihr bei einem bestimmten Induktionsschritt zugeordnet und bleibt nach Konstruktion auch bei den folgenden Schritten ihr Partner, da sich Damen beim Induktionsschritt nur verbessern können.

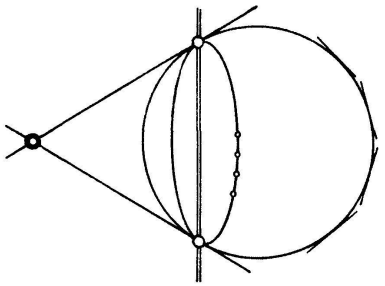
Allerdings ist nicht garantiert, dass alle Damen berücksichtigt werden, was man an einfachen, die Bedingungen erfüllenden Beispielen sieht.

H. Bachofner, Aarburg

Über eine Bemerkung J. Steiners

E. Müller hat auf eine Bemerkung Steiners aufmerksam gemacht, «dass die verschiedenartigsten Erscheinungen der Raumwelt miteinander verbunden sind», und als Beispiel u.a. die linearen Systeme von Kegelschnitten und Quadriken genannt. So lässt sich z.B. eine Fülle von Sätzen, die allein Kegelschnitte betreffen, aus wenigen allgemeinen Sätzen durch Spezialisierung herleiten. Dabei kann ein Kegelschnitt, fasst man ihn als Erzeugnis seiner Punkte auf, in ein Geradenpaar oder in eine Doppelgerade zerfallen, fasst man ihn aber als Erzeugnis seiner Tangenten auf, so kann er in ein Punktepaar oder in einen Doppelpunkt zerfallen, an die ebenfalls Tangenten gezogen werden können.

Besonderes Interesse verdienen dabei die selbstdualen Figuren, wie etwa die zweier Kegelschnitte, die einander doppelt berührend ein- und umschrieben sind, da in



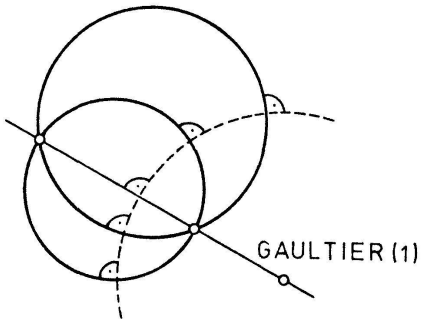
diesen Figuren die Kegelschnitte in Punktepaare oder in Geradenpaare zerfallen können.

Lässt man ferner zu, dass ein Geradenpaar oder ein Punktepaar imaginär ist, indem man etwa einen Kreis als Kegelschnitt, der dem unendlich fernen imaginären Kreispunktepaar umschrieben ist, deutet, so erhält man verschiedene Figuren für ein und denselben projektiven Sachverhalt.

Als Beispiel für diese Gedanken im Sinne Steiners sollen die im folgenden aufgeführten Sätze dienen.

Bei Gaultier findet sich wohl zum erstenmal der Satz:

Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise senkrecht schneiden, liegen auf einer Geraden [1].

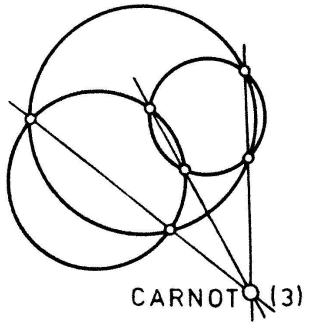


Diese Gerade heisst nach Steiner Potenzgerade, sie geht durch die Schnittpunkte beider Kreise, die nicht reell zu sein brauchen. Aus dem Satz von Gaultier folgt anschaulich sofort:

Die Potenzgerade ist der Ort aller Punkte, von denen die Tangenten an beide Kreise gleich lang sind [2],

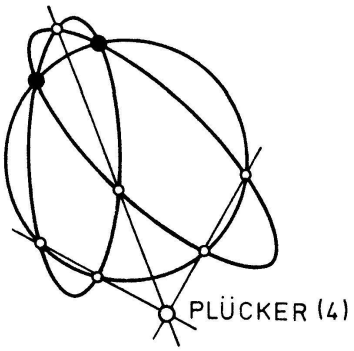
und damit ein Satz, den wohl zuerst Carnot 1810 angegeben hat:

Die drei Potenzgeraden von drei Kreisen gehen durch einen Punkt, oder sie sind parallel [3].



Letzteres ist nur ein Spezialfall des folgenden Satzes, der auf Plücker zurückgeht:

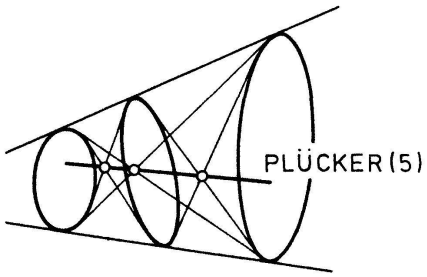
Die gemeinsamen Sehnen dreier Kegelschnitte, die eine Sehne gemeinsam haben, gehen durch einen Punkt [4].



Denn vom projektiven Standpunkt bilden alle Kreise ein spezielles Netz von Kegelschnitten, die zwei Grundpunkte, nämlich die unendlich fernen imaginären Kreispunkte, gemeinsam haben. Die Potenzgeraden sind dann die Verbindungen der beiden übrigen, paarweise gemeinsamen Punkte. Auch hier brauchen die gemeinsamen Sehnen nicht reell zu sein.

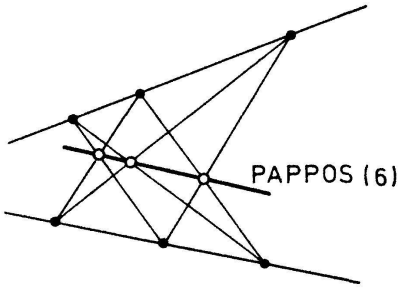
Anschaulicher ist der Satz vielleicht in seiner dualen Form, die ebenfalls auf Plücker zurückgeht:

Die paarweise gemeinsamen Tangenten dreier Kegelschnitte, die zwei Geraden einbeschrieben sind, schneiden sich in Punkten einer Geraden [5].



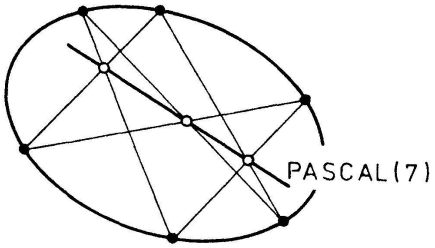
Dabei sind die drei Kegelschnitte Erzeugnisse ihrer Tangenten, sie können in Punktepaare zerfallen. In diesem Fall lautet der letzte Satz so:

Die gemeinsamen Tangenten dreier Punktepaare, die paarweise auf zwei Geraden liegen, schneiden sich in Punkten einer Geraden [6].



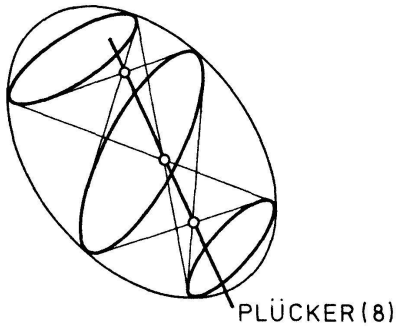
Das ist der Sechsecksatz von Pappos. Er ist bekanntlich im Sechsecksatz von Pascal enthalten:

Die gemeinsamen Tangentenpaare dreier Punktepaare eines Kegelschnittes schneiden sich bei geeigneter Auswahl in Punkten einer Geraden [7],



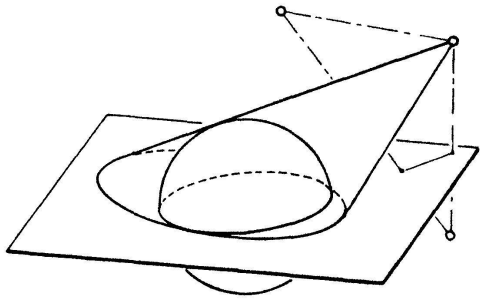
nämlich für den Fall, dass der Kegelschnitt als Erzeugnis seiner Punkte in ein Geradenpaar zerfällt. Aber auch der Satz von Pascal ist nur eine Spezialisierung des folgenden Satzes, der ebenfalls auf Plücker zurückgeht:

Die gemeinsamen Tangentenpaare dreier Kegelschnitte, die einem vierten einbeschrieben sind, schneiden sich bei geeigneter Auswahl in Punkten einer Geraden [8].



Bei Pascal zerfallen wie bei Pappos die einbeschriebenen Kegelschnitte in Punktepaare.

Zum Beweis des letzten Satzes fasse man den umschriebenen Kegelschnitt als ebenen Schnitt einer Quadrik und die drei einbeschriebenen Kegelschnitte als die Projektionen dieser Quadrik aus den Ecken eines Dreiecks in die Schnittebene[1]) auf. Die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte sind dann die Spuren der Tangentialebenen aus den drei Seiten des Dreiecks an die Quadrik. (Darin liegt zugleich eine Anweisung für die Auswahl der Tangentenpaare). Die Tangentenschnittpunkte sind dann die Spuren der Dreieckseiten. Sie liegen auf der Spur der Dreiecksebene, d.h. auf einer Geraden.



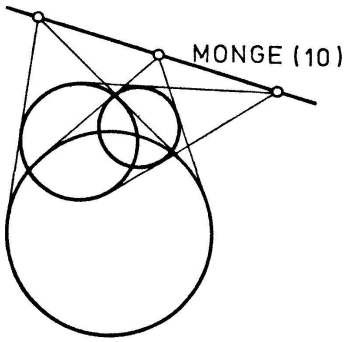
Im Falle des Satzes von Pascal liegen die drei Projektionszentren auf der Quadrik, die drei Kegel entarten zu Tangentialebenen der Quadrik, die Projektionen zerfallen in Punktepaare. Diesen Spezialfall hat schon Dandelin [9] betrachtet. Ist die schnei-

[1]) Das kann auf verschiedene Weise geschehen.

dende Ebene Tangentialebene der Quadrik, so zerfällt der umschriebene Kegelschnitt in ein Geradenpaar, es ergibt sich Satz [5]. Entarten dazu die Projektionskegel zu Tangentialebenen, so ergibt sich die Figur von Pappos [6].

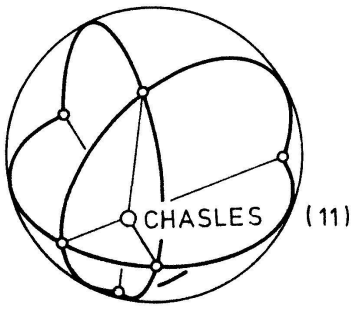
Entartet die Quadrik aber in einen Kegelschnitt, so erhalten wir einen Spezialfall des Satzes [8], für den der umschriebene Kegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt. Ist dieses Punktepaar speziell das Kreispunktepaar, so folgt ein Satz, den wohl zuerst Monge angegeben hat:

Die äusseren Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen auf einer Geraden [10].



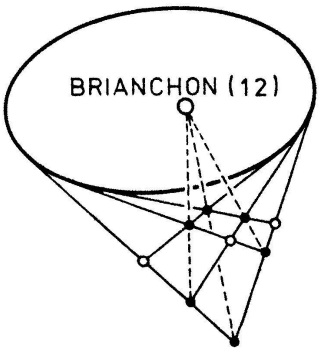
Etwas anschaulicher ist vielleicht der zu Satz [8] duale Satz:

Die gemeinsamen Sehnen von drei Kegelschnitten, die einem vierten einbeschrieben sind, gehen bei geeigneter Auswahl durch einen Punkt [11].



Den zu oben dualen räumlichen Beweis hat Chasles gegeben: Er deutet die Figur als Projektion dreier ebener Schnitte einer Quadrik des dreidimensionalen Raumes.[1]) Dann liegen die gemeinsamen Sehnen in den Schnittgeraden der drei Ebenen, die sich in einem Punkt schneiden. (In der Annahme über die Sichtbarkeit liegt eine Anweisung über die Auswahl der Sehnen.)

Sind die drei Ebenen speziell Tangentialebenen der Quadrik, so zerfallen die Kegelschnitte in Geradenpaare: Die Figur von Chasles geht in die bekannte Figur von Brianchon [12] über.



Projiziert man die Quadrik aus einem ihrer Punkte, so zerfällt ihr Umriss in ein Punktepaar, und man erhält die Figur [4] von Plücker. Sind dazu die drei Schnittebenen von [11] Tangentialebenen der Quadrik, so erhält man die selbstduale Figur [6] von Pappos.

Ist insbesondere die Quadrik eine Kugel, so sind die ebenen Schnitte Kreise. Da bei stereographischer Projektion der Kugel Kreise in Kreise übergehen, geht in diesem speziellen Fall die Figur [11] von Chasles in die Figur [3] von Carnot über, von der wir ausgegangen waren. Ist die Quadrik ein Kegel, so erhält man den zur projektiven Fassung von [10] dualen Satz.

Man kann einen Tangentialkegel an eine Quadrik und einen ebenen Schnitt einer Quadrik als entartete Quadriken auffassen, die der anderen Quadrik ein- bzw. umschrieben sind. Die angegebenen und andere Sätze ergeben sich damit durch Spezialisierung aus der allgemeineren, räumlichen, selbstdualen Figur einer Quadrik, der drei weitere Quadriken einbeschrieben sind. Wolfgang Böhm

LITERATUR

[1] L. Gaultier, J. éc. polyt. *9.* cah. 16, 139 und 147 ff (1813).
[2] vgl. C.W. Merrifield, London math. soc. proc. *2*, 175–177 (1869).
[3] L. M. N. Carnot, *Geometrie der Stellung 2*, 104 (Altona 1810).
[4] J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen 1*, 256 (Essen 1828).
[5] J. Plücker, J. Math. *6*, (1829), vgl. E. Müller, Jber. dtsch. Math. Ver. *12*, 105–110 (1903).
[6] vgl. F. Commandino, *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones*, Nr. 139, (Pisanii 1588).
[7] B. Pascal, *Œuvres 4*, 1–7 (La Haye 1779).
[8] J. Plücker, *Analytisch geometrische Entwicklungen 1*, 261 (Essen 1828), vgl. W. Böhm, Arch. Math. *15*, 392–393 (1964).
[9] vgl. W. Blaschke, *Projekt. Geometrie*, Nr. 35 (Birkhäuser 1954).
[10] vgl. J. Steiner, *Allg. Theorie der Kreise und Kugeln*, (Zürich 1931).
[11] M. Chasles, *Traité des Sections coniques*, 357 (Paris 1865).
[12] C. J. Brianchon, J. éc. polyt. *6*, cah. 13, 301 (1806).

Aufgaben

Aufgabe 677. Ein Dreieck habe den Flächeninhalt F und die Seitenhalbierenden m_a, m_b, m_c. Man zeige, dass

$$(m_a + m_b + m_c)/(m_a^{-1} + m_b^{-1} + m_c^{-1}) \geq F\sqrt{3}\,,$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

1. *Lösung (mit Verschärfung):* Für $x, y, z > 0$ setzen wir $f(x_n) := f(x, y, z) := (x + y + z)/(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})$. Weil das Dreieck mit den Seitenlängen m_a, m_b, m_c den Flächeninhalt $3F/4$ besitzt, wird $f(a, b, c) := f(a_n) \geq 4F/\sqrt{3}$ behauptet. Es lässt sich folgende Verschärfung zeigen:

$$\begin{array}{ccccccc} f(h_n) & \leq & 3f(s_n) & \leq & F\sqrt{3} & \leq & f(r_n) \leq \frac{3}{4} f(a_n)\,. \\ \text{Höhen} & & \text{Berührstrecken} & & & & \text{Anradien} \quad \text{Seiten} \end{array}$$