Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1973)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Projiziert man die Quadrik aus einem ihrer Punkte, so zerfällt ihr Umriss in ein Punktepaar, und man erhält die Figur [4] von Plücker. Sind dazu die drei Schnittebenen von [11] Tangentialebenen der Quadrik, so erhält man die selbstduale Figur [6] von Pappos.

Ist insbesondere die Quadrik eine Kugel, so sind die ebenen Schnitte Kreise. Da bei stereographischer Projektion der Kugel Kreise in Kreise übergehen, geht in diesem speziellen Fall die Figur [11] von Chasles in die Figur [3] von Carnot über, von der wir ausgegangen waren. Ist die Quadrik ein Kegel, so erhält man den zur projektiven Fassung von [10] dualen Satz.

Man kann einen Tangentialkegel an eine Quadrik und einen ebenen Schnitt einer Quadrik als entartete Quadriken auffassen, die der anderen Quadrik ein- bzw. umschrieben sind. Die angegebenen und andere Sätze ergeben sich damit durch Spezialisierung aus der allgemeineren, räumlichen, selbstdualen Figur einer Quadrik, der drei weitere Quadriken einbeschrieben sind. Wolfgang Böhm

LITERATUR

[1] L. Gaultier, J. éc. polyt. *9.* cah. 16, 139 und 147 ff (1813).
[2] vgl. C. W. Merrifield, London math. soc. proc. *2*, 175–177 (1869).
[3] L. M. N. Carnot, *Geometrie der Stellung 2*, 104 (Altona 1810).
[4] J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen 1*, 256 (Essen 1828).
[5] J. Plücker, J. Math. *6*, (1829), vgl. E. Müller, Jber. dtsch. Math. Ver. *12*, 105–110 (1903).
[6] vgl. F. Commandino, *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones*, Nr. 139, (Pisanii 1588).
[7] B. Pascal, *Œuvres 4*, 1–7 (La Haye 1779).
[8] J. Plücker, *Analytisch geometrische Entwicklungen 1*, 261 (Essen 1828), vgl. W. Böhm, Arch. Math. *15*, 392–393 (1964).
[9] vgl. W. Blaschke, *Projekt. Geometrie*, Nr. 35 (Birkhäuser 1954).
[10] vgl. J. Steiner, *Allg. Theorie der Kreise und Kugeln*, (Zürich 1931).
[11] M. Chasles, *Traité des Sections coniques*, 357 (Paris 1865).
[12] C. J. Brianchon, J. éc. polyt. *6*, cah. 13, 301 (1806).

Aufgaben

Aufgabe 677. Ein Dreieck habe den Flächeninhalt F und die Seitenhalbierenden m_a, m_b, m_c. Man zeige, dass

$$(m_a + m_b + m_c)/(m_a^{-1} + m_b^{-1} + m_c^{-1}) \geq F\sqrt{3}\,,$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

1. *Lösung (mit Verschärfung):* Für $x, y, z > 0$ setzen wir $f(x_n) := f(x, y, z) := (x + y + z)/(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})$. Weil das Dreieck mit den Seitenlängen m_a, m_b, m_c den Flächeninhalt $3F/4$ besitzt, wird $f(a, b, c) := f(a_n) \geq 4F/\sqrt{3}$ behauptet. Es lässt sich folgende Verschärfung zeigen:

$$\underset{\text{Höhen}}{f(h_n)} \leq \underset{\text{Berührstrecken}}{3f(s_n)} \leq F\sqrt{3} \leq \underset{\text{Anradien}}{f(r_n)} \leq \underset{\text{Seiten}}{\frac{3}{4}f(a_n)}\,.$$

Die beiden inneren Ungleichungen erweisen sich als gleichwertig mit $3\,s^2 \leq (4\,R + r)^2$ und sind daher richtig ([1], (5.5)), die beiden äusseren dagegen mit

$$r\,(4\,R + r)^2/(2\,R - r) \leq s^2\,. \tag{1}$$

(1) lässt sich durch Einschieben von $r\,(16\,R - 5\,r)$ herleiten, indem $r\,(16\,R - 5\,r) \leq s^2$ bekannt ([1], (5.8)) und $r\,(4\,R + r)^2/(2\,R - r) \leq r\,(16\,R - 5\,r)$ mit $0 \leq (R - 2\,r)\,(8\,R - r)$ äquivalent ist.

I. Paasche, München

Second solution (with generalization): We show more generally that

$$\sqrt{3}\,(c_a + c_b + c_c) \geq 4\,(1 - uv)\,F\,(c_a^{-1} + c_b^{-1} + c_c^{-1}) \tag{2}$$

where c_a, c_b, c_c denote 3 symmetric cevians of a triangle dividing the sides in the ratio v/u where $u + v = 1$. This result follows from a duality relation for cevians [See Notices of Amer. Math. Soc. Jan. 1973, P. A–167]. The proposed inequality corresponds to the special case of (2) when $u = v = 1/2$.

Let $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, denote three vectors from an origin 0 to the respective vertices of triangle ABC. Now consider the 3 symmetric cevians c_a, c_b, c_c, whose endpoints are the respective endpoints of $\boldsymbol{A}$, $u\boldsymbol{B} + v\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{B}$, $u\boldsymbol{C} + v\boldsymbol{A}$; and $\boldsymbol{C}$, $u\boldsymbol{A} + v\boldsymbol{B}$. Since $\sum (u\boldsymbol{B} + v\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, (c_a, c_b, c_c) form a triangle. If we now let F', R', r', h_a', c_a', respectively, denote the area, circumradius, inradius, altitude and cevian to side c_a (with same u, v), of the triangle whose sides are c_a, c_b, c_c, it can be shown that

$$F' = (1 - uv)\,F, \quad R' = \frac{c_a\,c_b\,c_c}{4\,(1 - uv)\,F}\,, \quad r' = \frac{2\,(1 - uv)\,F}{c_a + c_b + c_c}\,,$$

$$h_a' = \frac{2\,(1 - uv)\,F}{c_a}\,, \quad c_a'^2 = uc_c^2 + vc_b^2 - uvc_a^2\,, \quad \text{etc.}$$

Then corresponding to any triangle inequality

$$I(a, b, c, F, R, r, h_a, h_b, h_c, c_a, c_b, c_c) \geq 0$$

for ABC, we also have the dual cevian triangle inequality

$$I(c_a, c_b, c_c, F', R', r', h_a', h_b', h_c', c_a', c_b', c_c') \geq 0\,.$$

Inequality (2) is just the cevian dual of the known inequality

$$\sqrt{3}\,(a + b + c) \geq 2\,(h_a + h_b + h_c)$$

(see [1], (6.1)).

Similarly, many of the dual median inequalities obtained by the proposer in his paper, "Some inequalities for the medians of a triangle", Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 341 (1971) 37–40, can be extended to cevian inequalities.

M. S. Klamkin, Dearborn, Mich., USA

[1] O. BOTTEMA, et al., Geometric Inequalities, Walters-Noordhoff, Groningen 1969.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH) und P. Nüesch (Lausanne).

Aufgabe 678. In jedem Dreieck mit den Ecken A_i, den Seitenlängen a_i, dem halben Umfang s, den Winkelhalbierenden w_i, und dem Inkreismittelpunkt I gilt

$$9\left\{\frac{\sum a_i^3}{2\,s^3}+16\left(\prod_i \frac{\overline{IA_i}}{w_i}\right)^{1/3}\right\}\leq 100\,,$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck. Man beweise diese Behauptung.

F. Leuenberger, Feldmeilen, ZH

Lösung: Wir setzen $X=(\sum a^3)/2\,s^3$ und $Y=(\Pi\,\overline{IA}/w_a)^{1/3}$. Aus den bekannten Beziehungen $a+b+c=2\,s$, $bc+ca+ab=s^2+4\,Rr+r^2$ und $abc=4\,Rrs$ folgert man leicht

$$\sum a^3=2\,s\,(s^2-6\,Rr-3\,r^2)$$

und

$$\Pi\,(b+c)=2\,s\,(s^2+2\,Rr+r^2)\,.$$

Auch $\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}=4\,Rr^2$ und $\Pi\sin(\alpha/2)=r/4R$ sind bekannt, und es ergeben sich

$$X=1-\frac{3\,r\,(2\,R+r)}{s^2} \tag{1}$$

und

$$4\,Y^3=1+\frac{r\,(2\,R+r)}{s^2}\,.$$

Also ist $X+12\,Y^3=4$, und man bekommt:

$$9\,(X+16\,Y)\leqq 100 \rightleftarrows 9\,(4+16\,Y-12\,Y^3)\leqq 100 \rightleftarrows$$

$$27\,Y^3-36\,Y+16\geqq 0 \rightleftarrows \left(Y-\frac{2}{3}\right)^2\left(Y+\frac{4}{3}\right)\geqq 0\,.$$

Die letzte Ungleichung ist immer richtig, und Gleichheit tritt ein, genau wenn $Y=2/3$, d.h. genau wenn $s^2=(27/5)\,r\,(2\,R+r)$.

Man hat nun $s^2\geqq 16\,Rr-5\,r^2$ und $R\geqq 2\,r$, beide mit Gleichheit genau wenn $a=b=c$. Hieraus folgt leicht, dass

$$s^2\geqslant\frac{27}{5}\,r\,(2R+r) \tag{2}$$

mit Gleichheit genau wenn $a=b=c$. Zusammengefasst sieht man, dass $9\,(X+16\,Y)\leqq 100$ mit Gleichheit genau wenn $a=b=c$.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung der Redaktion: H. Kappus weist auf die Gültigkeit von $9\,X\geq 4$ hin, was sich in der Tat leicht aus (1) und (2) ergibt.

Aufgabe 679. Es seien n und d natürliche Zahlen mit $d < n$. Man beweise, dass folgende Aussagen logisch gleichwertig sind: a) In jeder Sequenz von n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es d Zahlen derart, dass alle von ihnen mit jeder der restlichen $n - d$ Zahlen einen grössten gemeinsamen Teiler kleiner als d haben.
b) $n \leqq 2d - 1$. H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung des Aufgabenstellers:

i) a) $\rightarrow$ b): Für $n \geqq 2d$ werden die Sequenz $S_n = \{(n-1)! + i;\ 0 \leqq i \leqq n-1\}$ und deren Teil $S_{nd} = \{(n-1)! + i;\ d \leqq i \leqq n-1\}$ betrachtet. S_{nd} besteht aus mindestens d Zahlen, die alle mit $(n-1)!$ einen ggT $\geqq d$ haben. Wie auch immer aus S_n dann d Zahlen ausgewählt werden, entweder ist $(n-1)!$ dabei und wenigstens eine Zahl aus S_{nd} nicht, oder $(n-1)!$ ist nicht dabei und dann aber mindestens eine Zahl aus S_{nd}.

ii) b) $\rightarrow$ a): Für eine beliebige Sequenz S der Länge n mit $d + 1 \leqq n < 2d$ gibt es höchstens $n - d$ Teiler $\geqq d$, die möglicherweise zwei Elemente von S teilen. Mehr als zwei Elemente teilt keine Zahl $\geqq d$. S wird nun inKlassen eingeteilt: Zu R sollen alle Glieder von S gehören, die mit jedem anderen einen ggT $< d$ haben. Zu $K_i(j)$ werden dann $j + 1$ der übrigen Glieder zusammengefasst $(1 \leqq j \leqq n - d)$, und zwar mit einem a alle a_k, die mit a einen ggT $\geqq d$ haben, weiterhin alle Glieder, die mit einem a_k einen ggT $\geqq d$ haben, usw.. Jede Zahl aus $K_i(j)$ hat dann mit jeder nicht zu $K_i(j)$ gehörenden Zahl von S einen ggT $< d$. Ist j_0 der grösste auftretende Wert von j, so werden in einer Klasse $K_i(j_0)$ durch j_0 der höchstens $n - d$ zweimal teilenden Teiler $j_0 + 1$ Zahlen aus S erfaßt. Mindestens eine Klasse $K_i(j_0)$ existiert. Möglichst viele weitere Zahlen von S würden erfasst, wenn die höchstens $n - d - j_0$ restlichen Teiler jeder eine Klasse K_i (1) mit zwei Zahlen aus S bestimmen würden. Für die Mächtigkeit von R gilt daher $|R| \geqq n - (j_0 + 1) - 2(n - d - j_0) \geqq j_0$. Für $|R| \geqq n - d$ lassen sich nun die Zahlen aus allen $K_i(j)$ mit Zahlen aus R zu den gesuchten d Zahlen ergänzen. Für $|R| < n - d$ können wegen $|K_i(j)| \leqq j_0 + 1$ Mengen $K_i(j)$ so gewählt werden, dass für die Gesamtzahl m aller ihrer Elemente $d - (j_0 + 1) < m \leqq d$ gilt. Diese m Zahlen können dann mit $d - m$ $(\leqq j_0 \leqq |R|)$ Elementen aus R zu den gesuchten d Zahlen von S ergänzt werden.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), J. Fehér (Pécs, Ungarn) und I. Paasche (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. April 1974,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 701. Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 2. Im n-dimensionalen euklidischen Raum seien eine Hyperebene E und eine Projektionsrichtung r gegeben derart, dass r mit E einen Winkel vom Masse φ mit $0 < \varphi \leq \pi/2$ einschliesse. Es sei 0 eine Ecke eines beliebigen n-dimensionalen Würfels der Kantenlänge a. Man berechne die Quadratsumme der Längen der Projektionen auf E der von 0 ausgehenden Würfelkanten. J. M. Ebersold, Winterthur

Aufgabe 702. Man beweise, dass für die Seitenlängen a, b, c, die Seitenhalbierenden m_a, m_b, m_c und den Inkreisradius r eines Dreiecks gilt:

$$\frac{m_b^2 m_c^2}{bc} + \frac{m_c^2 m_a^2}{ca} + \frac{m_a^2 m_b^2}{ab} \geq \frac{81}{4} r^2 ,$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$ A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 703. Für alle ganzen Zahlen k, n mit $k > 0$, $n \geq 0$ zeige man

$$\sum_{i_1=0}^{n} \frac{1}{i_1!} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{1}{i_2!} \cdots \sum_{i_k=0}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}} \frac{1}{i_k!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!} .$$

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Aufgabe 704. $\nu(k)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der natürlichen Zahl k. Man zeige, dass für jedes $\eta > 0$ die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\log k)^{\nu(k)}}{k^{1+\eta}}$$

konvergent ist. P. Erdös, Budapest

Literaturüberschau

On Invariants and the Theory of Numbers. Von L. E. Dickson. 110 Seiten. $1.50. Dover, New York 1966.

This is an unaltered reproduction of the 1914 edition (published as Part I of the Madison Colloquium by the American Mathematical Society). The lectures, five in all, deal with the following topics: A theory of invariants applicable to algebraic and modular forms (Lecture I), Seminvariants of algebraic and modular binary forms (Lecture II), Invariants of a modular group; formal invariants and covariants of modular forms (Lecture III), Modular geometry and covariantive theory of a quadratic form in m variables modulo 2 (Lecture IV), A theory of plane cubic curves with a real inflexion point valid in ordinary and in modular geometry (Lecture V).

J. Steinig

Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Von Béla Sz.-Nagy. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 39 (Berichtigter Nachdruck der 1. Auflage, die 1942 in der Alten Folge derselben Reihe als Band V, Heft 5 erschien). VI und 81 Seiten. DM 18,–. Springer-Verlag Berlin–Heidelberg–New York 1967.

Inhalt: Einleitung. I. Grundbegriffe. II. Beschränkte selbstadjungierte und normale Transformationen. III. Integrale beschränkter Funktionen in bezug auf eine Spektralschar. IV. Kanonische Spektraldarstellung beschränkter selbstadjungierter und normaler Transformationen. V. Verallgemeinerung des Begriffs einer Transformation. Nichtbeschränkte selbstadjungierte und normale Transformationen. VI. Symmetrische Transformationen. VII. Integrale allgemeiner Funktionen in bezug auf eine Spektralschar. VIII. Kanonische Spektraldarstellung allgemeiner selbstadjungierter und normaler Transformationen. IX. Über das Spektrum einer Transformation. X. Funktionen selbstadjungierter oder normaler Transformationen. XI. Spektraldarstellung von Gruppen und Halbgruppen linearer Transformationen. Zeichenregister. Literaturverzeichnis. Nachtrag.