

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 29 (1974)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Eine bemerkenswerte Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene  
**Autor:** Rabl, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29890>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

appear to give some evidence both for and against the general conjecture that  $\lambda_k < \infty$  for all  $k$ .

The author wishes to thank John Steinig for several valuable suggestions.

William A. Webb, Washington State University, Pullman, Washington

#### REFERENCES

- [1] A. AIGNER, *Brüche als Summe von Stammbrüchen*, J. reine angew. Math. 214/215, 174–179, (1964).
- [2] L. BERNSTEIN, *Zur Lösung der diophantischen Gleichung  $m/n = 1/x + 1/y + 1/z$ , insbesondere im Falle  $m = 4$* , J. reine angew. Math. 211, 1–10 (1962).
- [3] P. ERDÖS, *On a diophantine equation*, Mat. Lapok, 1, 192–210 (1950).
- [4] G. PALAMÀ, *Su di una congettura di Sierpiński relativa alla possibilità in numeri naturali della  $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$* , Boll. Un. Mat. Ital., 13, 65–72 (1958).
- [5] W. SIERPIŃSKI, *Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires*, Mathesis 65, 16–32 (1956).
- [6] B. STEWART, *Theory of Numbers*, 2nd ed., 198–207, (New York, 1964).
- [7] B. STEWART and W. WEBB, *Sums of Fractions with Bounded Numerators*, Can. J. Math. 18, 999–1003 (1966).
- [8] K. YAMAMOTO, *On the Diophantine Equation  $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$* , Mem. Fac. Sci. Kyushu U., [A] 19, 37–47 (1965).

## Eine bemerkenswerte Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene

### Einleitung

Die im folgenden untersuchte Abbildung hat gewisse Ähnlichkeiten mit der *Zyklographie* [1, 2]. Bei ihr werden die Punkte des dreidimensionalen Raumes  $R^3$  auf die Kreise einer im  $R^3$  enthaltenen, waagrecht gedachten Ebene abgebildet, wobei statt der in der Zyklographie für den Abbildungsvorgang verwendeten Drehkegel mit lotrechter Achse Drehparaboloide mit lotrechter Achse und festem Parameter ( $= 1/2$ ) treten.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Zyklographie liegt darin, dass die Abbildung ohne Orientierung der Kreise auskommt und trotzdem umkehrbar eindeutig ist. Durch zyklographische Deutung der Bildkreise wird im Raum eine zweieindeutige Punkttransformation induziert, die einen klaren Einblick in das Wesen der neuen Abbildung gewährt.

Einer Geraden des  $R^3$  entspricht die Menge der eine Parabel der Bildebene doppelt berührenden Kreise, während die Scharen der einen Mittelpunktskegelschnitt doppelt berührenden Kreise von Parabeln mit lotrechter Achse herrühren. Diese Tatsachen lassen die konstruktive Lösung verschiedener damit zusammenhängender Aufgaben zu.

## 1. Erklärung der Abbildung

Durch die betrachtete Abbildung  $\mathfrak{B}$  werden die eigentlichen *Punkte* des euklidischen Raumes  $R^3$  auf die *Kreise* einer Ebene  $\pi$  wie folgt abgebildet: Sei  $z = 0$  die Gleichung von  $\pi$  in einem kartesischen Koordinatensystem, so ordnen wir einem Punkt  $P(x, y, z)$  den Kreis  $\phi$  aus  $\pi$  mit dem Mittelpunkt  $P'(x, y, 0)$  und dem Radius  $r = \sqrt{z}$  zu, kurz

$$\mathfrak{B} : P(x, y, z) \rightarrow \phi(x, y; \sqrt{z}) .$$

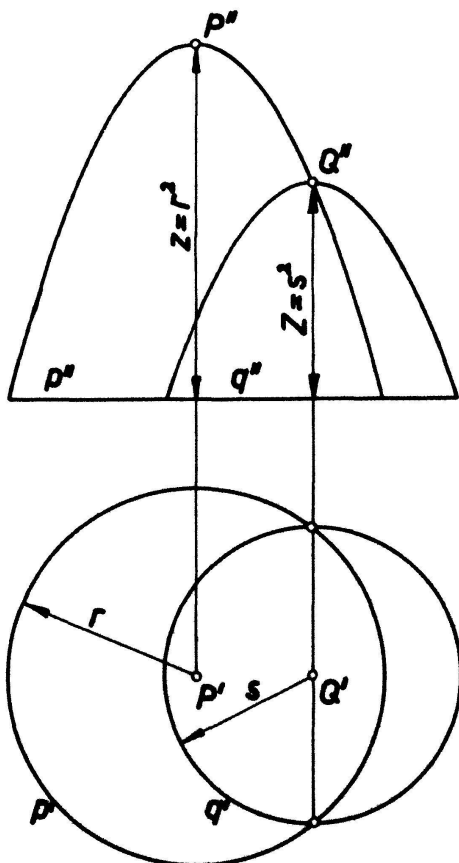
Durch diese offenbar *umkehrbar eindeutige Abbildung*  $\mathfrak{B}$  werden den reellen Punkten des «oberen» Halbraumes  $z > 0$  einteilige Kreise zugeordnet, jenen des «unteren» Halbraumes  $z < 0$  nullteilige und den Punkten aus  $\pi$  Nullkreise.

Die Abbildung lässt sich in einfacher Weise geometrisch deuten: Bringt man im Punkt  $P$  als Scheitel ein *Drehparaboloid*  $\Pi$  mit  $z$ -paralleler Achse und dem Parameter  $1/2$  an – in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  durch

$$\Pi : (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z) = 0 \quad (1)$$

dargestellt –, so schneidet dasselbe die Bildebene  $\pi$  ( $Z = 0$ ) nach dem erklärten Bildkreis  $\phi$ . Es fungiert bei der Abbildung als Vermittler und rechtfertigt daher die Bezeichnung «Projektionsparaboloid».

Wie aus (1) hervorgeht und durch Figur 1 illustriert wird, kann das zu einem zugeordneten Elementenpaar  $P, \phi$  gehörige Paraboloid  $\Pi$  als die Menge aller Punkte  $Q(X, Y, Z)$  aufgefasst werden, deren «Grundriss»  $Q'(X, Y, 0)$  in bezug auf den Kreis  $\phi$  die Potenz  $-Z$  hat. Da alle achsenparallelen Ebenen Schnitte von  $\Pi$  untereinander



Figur 1.

kongruente Parabeln sind, so gibt es unter den Meridianparabeln des Projektionsparaboloids  $\Theta$  von  $Q \in \Pi$  eine, welche dem Paraboloid  $\Pi$  angehört. Dies bedeutet, dass der Spurkreis  $p$  von  $\Pi$  den Bildkreis  $q$  ( $Q', s = \sqrt{Z}$ ) von  $Q$  nach Gegenpunkten schneidet, woraus der behauptete Potenzwert mit  $-s^2 = -Z$  abzulesen ist. Für einen Punkt  $Q \in \Pi$  mit  $Z < 0$  bedeutet dies, dass der reelle Vertreter seines nullteiligen Bildkreises von  $p$  orthogonal geschnitten wird.

## 2. Abbildung von Geraden

Beschreibt der Raumpunkt  $P$  irgendeine Kurve  $l$ , so durchläuft sein Bildkreis  $p$  in  $\pi$  eine bestimmte Kreisschar, deren Einhüllende  $h$  als das der Kurve  $l$  vermöge der Abbildung  $\mathfrak{B}$  zugeordnete Bild angesehen werden kann.

Im Falle einer Geraden  $l$  durchläuft das Projektionsparaboloid  $\Pi$  des auf  $l$  wandernden Punktes  $P$  eine Translationsschar, die im allgemeinen von einem parabolischen Zylinder  $\Lambda$  mit zu  $l$  parallelen Erzeugenden eingehüllt wird. Die Spur des Zylinders  $\Lambda$  in  $\pi$  stellt die Bildkurve  $h$  von  $l$  dar; diese ist demnach i. a. eine Parabel, die den Grundriss  $l'$  von  $l$  zur Achse hat. – Zur näheren Kennzeichnung der Bildparabel  $h$  sei das Koordinatensystem so gewählt, dass die Gerade  $l$  in der  $yz$ -Ebene verläuft und den Ursprung  $O$  enthält, also mit Benützung eines veränderlichen Parameters  $t$  durch

$$l: x = 0, \quad y = t, \quad z = ct \tag{2}$$

angesetzt werden kann. Die zugehörige Bildkreisschar wird dann gemäss (1) durch

$$p: X^2 + (Y - t)^2 = ct \tag{3}$$

dargestellt. Unter Verwendung der partiellen Ableitung nach  $t$

$$\dot{p}: -2(Y - t) = c \tag{4}$$

ergibt sich dann die Einhüllende  $h$  mit

$$h: X^2 = cY + \frac{c^2}{4}. \tag{5}$$

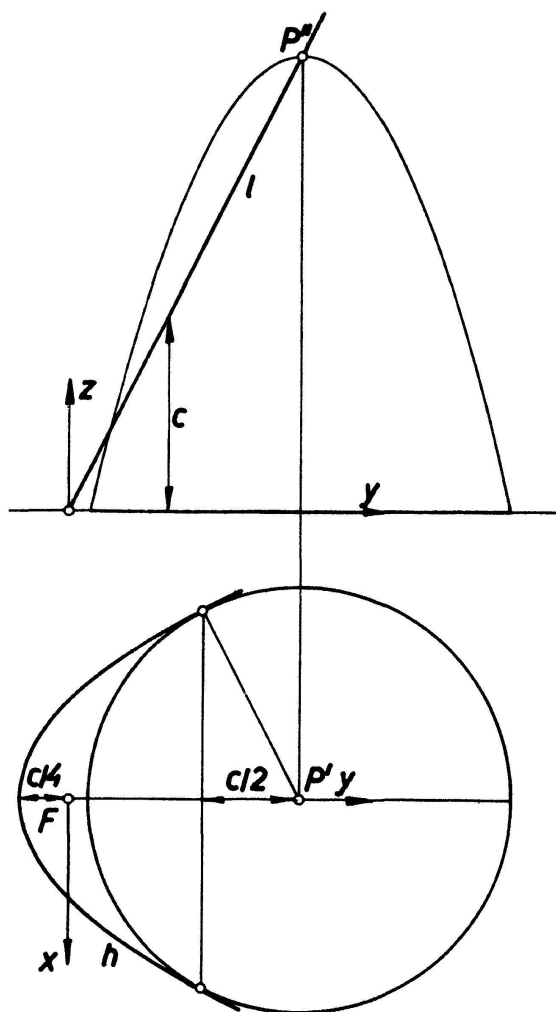
Dies ist eine Parabel mit dem Parameter  $c/2$ , die ihren Brennpunkt im Ursprung hat; letzteres steht im Einklang mit der Tatsache, dass der Bildkreis von  $O \in \pi$  ein Nullkreis ist, also in das Minimalgeradenpaar durch  $O' = O$  zerfällt. Die Berührsehne  $\dot{p}$  von  $p$  hat zufolge (4) den Zentralabstand  $c/2$  (Figur 2).

Zusammenfassend gilt mithin:

**Satz 1.** Die Bildkurve einer zur Bildebene schrägen Geraden  $l$  ist eine zum Normalriss  $l'$  von  $l$  symmetrische Parabel, die ihren Brennpunkt im Spurpunkt der Geraden  $l$  hat und deren Parameter gleich dem halben Anstieg von  $l$  ist.

Für eine zur Bildebene  $\pi$  parallele Gerade  $l$  zerfällt die Bildkurve  $h$  in ein Parallelenpaar. Für eine zu  $\pi$  normale Gerade tritt eine Schar konzentrischer Bildkreise auf, die keine eigentliche Einhüllende besitzt.

Als Anwendung seien einige Aufgaben der ebenen Geometrie angeführt, die sich mittels des vorliegenden Übertragungsprinzips durch räumliche Deutung leicht lösen lassen.



Figur 2.

**Aufgabe 1.** Es ist die Parabel zu ermitteln, die zwei gegebene Kreise doppelt berührt. – *Lösung:* Nach freier Wahl einer Einheitsstrecke (deren Kenntnis zur konstruktiven Durchführung der Abbildung  $\mathfrak{P}$  nötig ist) deute man die Angabekreise  $p_1, p_2$  als die Bilder zweier Raumpunkte  $P_1, P_2$ . Die Bildkurve  $h$  der Verbindungsgeraden  $l = P_1 P_2$  ist die gesuchte Parabel.

**Aufgabe 2.** Zu zwei koaxialen Parabeln ist ein Kreis zu ermitteln, der beide doppelt berührt. – *Lösung:* Man deute die beiden Parabeln  $h_1, h_2$  als die Bildkurven zweier Raumgeraden  $l_1, l_2$ . Der Bildkreis  $p$  des gemeinsamen Punktes  $P$  von  $l_1$  und  $l_2$  ist der gesuchte Kreis<sup>1)</sup>.

**Aufgabe 3.** Es ist jene Parabel mit vorgeschriebenem Brennpunkt zu ermitteln, die mit zwei gegebenen Parabeln je einen doppelt berührenden Kreis gemeinsam hat. – *Lösung:* Man deute die beiden Angabeparabeln  $h_1, h_2$  als die Bildkurven zweier Raumgeraden  $l_1, l_2$  und lege an dieselben die Treffgerade  $l$  aus dem gegebenen Brennpunkt  $F$ . Die Bildkurve  $h$  von  $l$  ist die gesuchte Parabel<sup>2)</sup>.

**Aufgabe 4.** Es sind Kreise zu finden, die eine gegebene Parabel doppelt berühren und von einem gegebenen Kreis nach Gegenpunkten geschnitten werden. –

<sup>1)</sup> Im Falle zweier translationskongruenten Parabeln ergibt sich kein eigentlicher Lösungskreis.

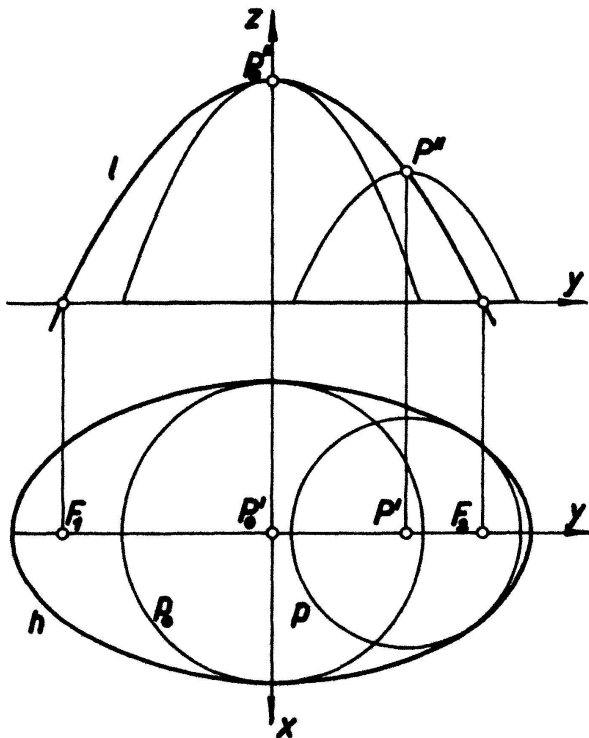
<sup>2)</sup> Etwas allgemeiner könnte statt des Brennpunktes  $F$  ein doppelt berührender Kreis vorgeschrieben werden.

*Lösung:* Diese Aufgabe läuft im Raum auf die Ermittlung der Schnittpunkte einer Geraden mit dem zum Abgabekreis  $p$  gehörigen Projektionsparaboloid  $\Pi$  hinaus (vgl. Abschnitt 1, Figur 1).

*Aufgabe 5.* Es sind jene Parabeln zu ermitteln, die mit vier gegebenen Parabeln je einen doppelt berührenden Kreis gemeinsam haben. – *Lösung:* Diese Aufgabe läuft im Raum auf die Bestimmung der Treffgeraden von vier gegebenen Geraden hinaus. Im allgemeinen wird es also zwei Lösungen geben, bei hyperboloidischer Lage des Geradenquadrupels jedoch  $\infty^1$ .

### 3. Abbildung von Parabeln mit lotrechter Achse

Die abzubildende Kurve  $l$  sei eine *Parabel* mit  $z$ -paralleler («lotrechter») Achse. Die zu den Punkten  $P$  von  $l$  gehörigen Projektionsparaboloid  $\Pi$  werden jetzt i. a. von einem elliptischen oder hyperbolischen Paraboloid  $\Lambda$  mit lotrechter Achse eingehüllt, das unter Umständen zu einer Parabel mit dem Parameter  $1/2$  degenerieren kann. Dementsprechend ist das als Spurkurve von  $\Lambda$  in  $\pi$  auftretende Bild  $h$  von  $l$  eine *Ellipse* oder *Hyperbel*, die auch in ein Geraden- oder Punktepaar ausarten kann. – Die Bildspurpunkte der Parabel  $l$  fallen dabei mit zwei Brennpunkten des Kegelschnittes  $h$  zusammen, da sie sich zufolge Abschnitt 1 auf Nullkreise abbilden. Der Bildkreis  $p_0$  des Parabelscheitels  $P_0$  ist ein Scheitelkreis des Bildkegelschnitts  $h$ , wodurch dieser nun ausreichend festgelegt erscheint (Figur 3).



Figur 3.

Zur analytischen Untersuchung genügt es, eine in der  $yz$ -Ebene verlaufende und zur  $z$ -Achse symmetrische Parabel  $l$  zu betrachten:

$$l: x = 0, \quad y = t, \quad z = a + b t^2 \quad (b \neq 0). \quad (7)$$

Die zugehörige Bildkreisschar wird gemäss (1) durch

$$p: X^2 + (Y - t)^2 = a + b t^2 \quad (8)$$

beschrieben. Unter Verwendung der partiellen Ableitung nach  $t$ ,

$$\dot{p}: Y = (1 - b) t, \quad (9)$$

ergibt sich dann nach Elimination von  $t$  die Gleichung der Hüllkurve  $h$  mit

$$h: (b - 1) X^2 + b Y^2 = a (b - 1). \quad (10)$$

Hieraus lässt sich für reelles  $a$  und  $b$  die Art des Bildkegelschnittes  $h$  von  $l$  samt allfälligen Ausartungen ablesen. Unter der Voraussetzung  $a \neq 0$  ist  $h$  eine ein- oder nullteilige *Ellipse*, falls  $b > 1$  oder  $b < 0$ ; für  $0 < b < 1$  ist  $h$  hingegen eine *Hyperbel*. Der Zentralabstand der Berührsehne eines beliebigen Kreises  $p$  der Bildschar ist zufolge (9) gleich dem halben Anstieg der Urparabel  $l$  in dem betreffenden Punkt  $P$ . – Im zulässigen Grenzfall  $b = 1$  artet der Kegelschnitt  $h$  in das *Punktepaar*  $(\pm \sqrt{a}, 0)$  aus, das für  $a > 0$  reell, für  $a < 0$  konjugiert imaginär ist; die Bildkreise  $p$  erfüllen demgemäss ein elliptisches bzw. hyperbolisches Kreisbüschel. – Bei der Annahme  $a = 0$  zerfällt die Bildkurve  $h$  in das *Geradenpaar*  $(1 - b) X^2 = b Y^2$ , das für  $0 < b < 1$  reell, sonst konjugiert imaginär ist; für  $b = 1$  schrumpft das Bild auf ein allen  $\infty^1$  Bildkreisen  $p$  gemeinsames *Linienelement* zusammen (parabolisches Kreisbüschel. Zusammenfassend sei festgehalten:

**Satz 2.** *Die Bildkurve einer Parabel mit zur Bildebene normaler Achse ist i. a. ein Mittelpunktskegelschnitt, der von den Bildkreisen aller Parabelpunkte doppelt berührt wird. Der Bildkegelschnitt besitzt die Bildspurpunkte der Parabel zu Brennpunkten und den Bildkreis des Parabelscheitels als Scheitelkreis.*

Mit Hilfe der festgestellten Beziehungen können wieder verschiedene Aufgaben gelöst werden, beispielsweise:

*Aufgabe 6.* Es ist der Kegelschnitt zu ermitteln, der drei gegebene Kreise mit kollinearen Mittelpunkten doppelt berührt. – *Lösung:* Der gesuchte Kegelschnitt ergibt sich als Bildkurve jener Parabel mit lotrechter Achse, welche die Ursprünge der drei Angabekreise verbindet.

*Aufgabe 7.* Es ist der Kegelschnitt zu ermitteln, der drei gegebene koaxiale Parabeln doppelt berührt. – *Lösung:* Der gesuchte Kegelschnitt ergibt sich durch die Abbildung einer Parabel mit lotrechter Achse, von der drei Tangenten bekannt sind.

*Aufgabe 8.* Es sind Kreise zu finden, die eine gegebene Parabel doppelt berühren und eine vorgeschriebene Tangente besitzen. – *Lösung:* Die Aufgabe läuft im Raum darauf hinaus, die Schnittpunkte einer Geraden mit einem parabolischen Zylinder zu ermitteln, der die Bildebene längs der gegebenen Tangente berührt.

#### 4. Zusammenhang mit der Zyklographie

Deutet man den Bildkreis  $p$  eines Raumpunktes  $P$  (nach Orientierung im einen oder anderen Sinn) als zyklographisches Bild zweier (bezüglich der Bildebene  $\pi$  spiegelbildlich angeordneten) Punkte  $P^*$ , so gelangt man zu einer *zweieindeutigen Punkttransformation*  $\mathfrak{Z}: P \rightarrow P^*$  des Raumes, die durch

$$\mathfrak{Z}: x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = \pm \sqrt{z} \quad (11)$$

beschrieben wird. Es ist von Interesse, die den bisher behandelten Gebilden  $G$  die ihnen vermöge  $\mathfrak{Z}$  zugeordneten Gebilde  $G^*$  gegenüberzustellen, weil deren zyklo-

graphisches Bild (abgesehen von der Orientierung) mit dem  $\mathfrak{B}$ -Bild von  $G$  zusammenfällt. Diese Gebilde  $G^*$  können mittels der Transformationsgleichungen (11) gefunden werden, sie ergeben sich aber auch ohne Rechnung durch zyklographische Deutung der jeweils vorliegenden Bildkreisscharen.

So entspricht etwa einer zur Bildebene  $\pi$  schrägen Geraden  $g$  (2) eine bezüglich  $\pi$  symmetrische Parabel  $g^*$ . Einer Parabel  $l$  mit lotrechter Achse (7) erscheint ein bezüglich  $\pi$  symmetrischer Mittelpunktskegelschnitt  $l^*$  zugeordnet (vgl. [2], S. 286), der in ein Geradenpaar zerfällt, wenn  $l$  die Ebene  $\pi$  berührt;  $l^*$  ist insbesondere eine gleichseitige Hyperbel bzw. ein orthogonales Geradenpaar, falls  $l$  den Parameter  $1/2$  hat.

Als Anwendung dieses Prinzips sei die Frage nach solchen Kurven  $c$  behandelt, bei welchen sich für die Bildkreise  $p$  der Punkte  $P \in c$  die Doppelberührung mit der Hüllkurve  $h$  auf eine einfache Oskulation reduziert, indem die Länge der Berührsehnen auf Null zusammenschrumpft. Die entsprechenden Kurven  $c^*$ , für welche diese Erscheinung bei der zyklographischen Abbildung auftritt, sind bekanntlich die unter  $45^\circ$  ansteigenden Böschungslinien («C-Kurven», vgl. [2], S. 253). Bei der Verebnung des gemeinsamen lotrechten Trägerzylinders  $\Gamma$  von  $c$  und  $c^*$  geht  $c^*$  in eine  $45^\circ$ -Gerade über und dementsprechend  $c$  in eine  $\pi$  berührende Parabel mit lotrechter Achse und dem Parameter  $1/2$  (s. o.). Umgekehrt erhält man demnach die gesuchten Raumkurven  $c$  durch Aufwicklung einer solchen Parabel auf einen lotrechten Zylinder  $\Gamma$  mit beliebiger Basis  $c'$ . Die Bildkurve  $h$  von  $c$  ist eine Evolvente ihres Grundrisses  $c'$ .

## 5. Schlusswort

Die hier untersuchte Abbildung  $\mathfrak{B}$  lässt sich unschwer auf den vierdimensionalen Raum übertragen. Man hat dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung der eigentlichen Punkte des  $R^4$  auf die Kugeln eines Bild- $R^3$ , wobei jeder der zum  $R^3$  schrägen Geraden  $g$  des  $R^4$  ein Drehparaboloid als Einhüllende der Bildkugelschar von  $g$  zugeordnet wird.

Damit lassen sich wieder verschiedene Aufgaben der Raumgeometrie mittels der darstellenden Geometrie des  $R^4$  [3] konstruktiv lösen. Als Beispiel:

*Aufgabe 9.* Es ist das Drehparaboloid zu ermitteln, das mit drei gegebenen Drehparaboloiden je eine eingeschriebene Kugel gemeinsam hat. – *Lösung:* Die Aufgabe läuft im  $R^4$  darauf hinaus, zu drei bekannten Geraden die gemeinsame Treffgerade zu bestimmen. Hierzu ist der Schnittpunkt einer der gegebenen Geraden mit dem Verbindungsraum der beiden anderen aufzusuchen.

K. Rabl, Maria-Enzersdorf, Österreich

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. FIEDLER, *Cyklographie*, (Leipzig 1882).
- [2] E. MÜLLER und J. KRAMES, *Die Zyklographie*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 2, (Leipzig/Wien 1929).
- [3] L. ECKHART, *Der vierdimensionale Raum*, Math. phys. Bibl. 84, (Leipzig/Berlin 1929).