Mittelpunktspolyeder im E4

Autor(en): **Hertel, Eike**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29895

im Intervall $(0, \pi)$ streng konkav ist. Wir unterscheiden nun folgende Möglichkeiten:

2a. $a = b$ und $63°1' \leqslant \alpha < 90°$.

Wir zeigen, dass in diesem Fall $s_C + s_B > 3\pi$ ist, was wie oben einen Widerspruch ergibt. Sei $h(\alpha) = 4a + c \leqslant s_C + s_B$. $h(\alpha) = 4\,g(\alpha) + g(2\alpha)$ ist konkav, wir haben daher nur die Randwerte zu überprüfen: $h(90°) = 8r \geqslant 3\pi$, und $h(63°1') > 3\pi$ (es genügt klarerweise, dies für $r = 3\pi/8$ nachzurechnen).

2b. $a > b$ und $63°1' \leqslant \alpha < 90°$

Wir bewegen A auf dem Umkreis auf B zu, bis $b = a$ ist. Da $\beta > \gamma$, nimmt dabei (wegen der Konkavität von g) $b = g(\beta)$ weniger zu als $c = g(\gamma)$ ab, also wird $b + c$ kleiner, und es folgt nach 2a): $s_B + s_C \geqslant 3a + b + c > 3\pi$.

2c. $60° \leqslant \alpha \leqslant 63°1'$.

Wenn wir A wie im Fall 2b) bewegen, wird $b + c$ kleiner. Anschliessend bewegen wir A und B mit gleicher Geschwindigkeit zueinander, solange bis $\alpha = \beta = 63°1'$ ist. Dabei wird $b + c = g(\alpha) + g(2\alpha)$ nochmals kleiner, wie eine einfache Rechnung zeigt. Es folgt:

$b + c \geqslant g(63°1') + g(106°2') =: v(r)$. Nun ist $e \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, $f \leqslant \frac{3\pi}{2} - (a + c) \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, $d \leqslant \frac{3\pi}{2} - (a + b) \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, und daher d, e und $f \leqslant \frac{3\pi}{2} - v(r)$. $v(r)$ ist monoton wachsend, also folgt wegen $v\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 207{,}5°$: d, e und f sind $\leqslant \frac{3\pi}{2} - v\left(\frac{3\pi}{8}\right) < 62{,}5°$.

Der Durchschnitt der drei Kreise mit Radius $r \geqslant 3\pi/8$ und Mittelpunkten A, B, C besteht nur aus dem Punkt M. Verkleinert man den Radius auf $62{,}5°$, so wird der Durchschnitt leer. Da d, e und $f < 62{,}5°$ sind, wäre jedoch D ein Element dieses Durchschnitts. Damit ist der Satz bewiesen.

Johann Linhart, Universität Salzburg

LITERATUR

[1] Rosta, Vera, *An Extremal Arrangement of three Great Circles on the Sphere*, Mat. Lapok *24* (1973). (to appear).

[2] Fejes Tóth, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.

Mittelpunktspolyeder im E^4

1. Es sei $\boldsymbol{P}^4$ die Menge der eigentlichen Polyeder (Polytope) des vierdimensionalen euklidischen Raumes E^4. Mit $\boldsymbol{S}^4$ bezeichnen wir die Menge aller konvexen vierdimensionalen Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne – das sind zentralsymmetrische Polyeder, deren sämtliche dreidimensionale Seitenflächen ebenfalls zentralsymmetrisch sind [1]. Zwei Polyeder A und B aus $\boldsymbol{P}^4$ heissen translativ zerlegungsgleich ($A \sim B$), wenn sie sich in endlich viele paarweise translationsgleiche Teilpolyeder zerlegen lassen. Ist W ein fester vierdimensionaler Würfel der Kantenlänge 1, so bezeichnen

wir mit $\boldsymbol{W}^4$ die Menge aller Polyeder A mit $A \sim \lambda W$, wobei λW der aus W durch Dilatation mit $\lambda > 0$ hervorgegangene Würfel ist. Es ist bekannt [1], dass $\boldsymbol{W}^4 \subset \boldsymbol{S}^4$ gilt. Durch Übertragung eines Ergebnisses von H. Hadwiger [2] für den E^3 wollen wir zeigen, dass auch die Umkehrung $\boldsymbol{S}^4 \subset \boldsymbol{W}^4$ richtig ist. Genauer gilt der folgende

Satz. Ein konvexes vierdimensionales Polyeder ist genau dann mit einem vierdimensionalen Würfel translativ zerlegungsgleich, wenn es ein Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne ist ($\boldsymbol{S}^4 = \boldsymbol{W}^4$).

2. Wir stellen zunächst einige Begriffe und Hilfsaussagen für den Beweis dieses Satzes zusammen (vgl. [3]).

Hilfssatz 1. Die translative Zerlegungsgleichheit $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation über $\boldsymbol{P}^4$.

Hilfssatz 2. Es gilt der folgende Additionssatz

$$A_1 \sim B_1 \text{ und } A_2 \sim B_2 \Rightarrow A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$$

und der Subtraktionssatz

$$A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2 \text{ und } A_1 \sim B_1 \Rightarrow A_2 \sim B_2 .$$

Die elementargeometrischen Additionen $A + B$ von Polyedern sollen stets ausführbar sein, was durch eventuelle Translationen der beteiligten Polyeder immer erreichbar ist.

Ferner betrachten wir folgende Abbildungen F_i von $\boldsymbol{P}^4$ in die reellen Zahlen (translationsinvariante und einfach additive Polyederfunktionale – vgl. etwa [4] bzw. [6]).

$$F_4(A) =_{df} V_4(A) ,$$

wobei V_4 das (vierdimensionale) Volumen bedeutet.

$$F_3(A) =_{df} V_3(A; u) - V_3(A; -u) ,$$

wobei $(A; u)$ das System der dreidimensionalen Seitenflächen von A mit dem ins Äussere von A weisenden Normalenvektor u darstellt und $V_3(A; u)$ der (dreidimensionale) Inhalt dieses Systems ist.

$$F_2(A) =_{df} V_2(A; u, v) - V_2(A; u, -v) + V_2(A; -u, -v) - V_2(A; -u, v) ,$$

dabei ist $(A; u, v)$ das System der zweidimensionalen Seitenflächen von $(A; u)$ mit dem ins «Äussere» von $(A; u)$ weisenden Normalenvektor v (orthogonal u) und V_2 der zweidimensionale Inhalt. Entsprechend ist das letzte Funktional zu verstehen:

$$\begin{aligned} F_1(A) =_{df} & V_1(A; u, v, w) - V_1(A; u, v, -w) \\ & + V_1(A; u, -v, -w) - V_1(A; u, -v, w) \\ & + V_1(A; -u, v, -w) - V_1(A; -u, v, w) \\ & + V_1(A; -u, -v, w) - V_1(A; -u, -v, -w) . \end{aligned}$$

Dann gilt der folgende

Hilfssatz 3. $A \sim B \Rightarrow F_i(A) = F_i(B) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$.

Bezüglich der Dilatation ϱA mit rationalem $\varrho > 0$ gilt der

Hilfssatz 4. Die Funktionale F_i sind rational-homogen vom Grade i, d.h.

$$F_i(\varrho A) = \varrho^i F_i(A) \quad (i = 1, 2, 3, 4) .$$

3. Ein Polyeder A aus $\boldsymbol{P}^4$ heisst i-stufiger Zylinder, wenn $A = B_1 \times \cdots \times B_i$ die i-fache Minkowskische Summe von konvexen Polyedern $B_1, \ldots, B_i$ ist, die in Unterräumen $E^{k_1}, \ldots, E^{k_i}$ liegen, welche sich paarweise in allgemeiner Lage befinden und für deren Dimensionen k_j gilt: $k_j \geqq 1$ und $\sum\limits_1^i k_j = 4$. Die Menge aller Polyeder C, die mit einer endlichen Summe von i-stufigen Zylindern translativ zerlegungsgleich sind, wird als i-te Zylinderklasse $\boldsymbol{Z}_i$ bezeichnet. Für diese Polyeder gilt der folgende

Hilfssatz 5. $C \in Z_j \Rightarrow F_i(C) \equiv 0$ für $i < j$.

(Vgl. [3], S. 55). Dabei soll $F_i(C) \equiv 0$ das identische Verschwinden des Funktionals F_i für alle Seitenflächennormalen u bzw. orthonormierten Richtungszweibeine (u, v) bzw. Richtungsdreibeine (u, v, w) andeuten.

Die entscheidende Rolle in unserem Beweis spielt der

Hilfssatz 6. Ist C aus $\boldsymbol{Z}_i$ und n eine natürliche Zahl, so gibt es ein Polyeder C_0 aus $\boldsymbol{Z}_{i+1}$ mit $nC \sim n^i \circ C + C_0$ (für $i = 4$ ist $C_0 = \varnothing$).

(Vgl. [3], S. 29). Dabei bedeutet $m \circ C$ die ganze Vervielfachung von C in folgendem Sinne:

$m \circ C = C_1 + \cdots + C_m$ und C_i translationsgleich C $(i = 1, \ldots, m)$.

Bezüglich der Operationen der Dilatation und der ganzen Vervielfachung stellen wir einige Eigenschaften zusammen in dem

Hilfssatz 7.
$$\begin{aligned} &\lambda (A \times B) = \lambda A \times \lambda B, \\ &\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B, \\ &m \circ (A + B) \sim m \circ A + m \circ B, \\ &A \sim B \Longleftrightarrow m \circ A \sim m \circ B. \end{aligned}$$

Schliesslich sind die geraden Prismen Z als spezielle 2stufige Zylinder von besonderem Interesse. Ein gerades Prisma $Z = P' \times h$ wollen wir darstellen durch $Z = (P', h)$, wo P' ein (eigentliches) Polyeder einer dreidimensionalen Hyperebene E^3 und h eine zu E^3 total orthogonale Strecke ist. Dann gilt folgender

Hilfssatz 8. $F_i(P', h) = h \cdot F'_{i-1}(P')$ für $i = 2, 3, 4$.

(Vgl. auch [4]). Dabei haben wir mit h zugleich die Länge (reelle Zahl) der Strecke h bezeichnet, und F'_j ist ein für die dreidimensionalen Polyeder P' in E^3 analog den F_i zu erklärendes Funktional.

Unsere Beweisvorbereitungen werden abgeschlossen durch den

Hilfssatz 9. Ist $Z = (P', \lambda h)$ ein gerades Prisma und λ eine positive reelle Zahl, so gibt es zwei Polyeder X und Y aus $\boldsymbol{Z}_3$ mit

$$(P', \lambda h) + X \sim (\lambda P', h) + Y .$$

Diese Aussage ist in einem kürzlich von Jessen formulierten Satz enthalten ([7], S. 51).

4. Nun beweisen wir den eingangs formulierten Satz. Zunächst ist klar, dass jeder Würfel ein Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne ist bzw. $\boldsymbol{W}^4 \subset \boldsymbol{S}^4$. Es sei umgekehrt M ein beliebiges konvexes vierdimensionales Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne. Dann besitzt M paarweise translationsgleiche Seitenflächen $(M;\, u)$ und $(M;\, -u)$ [1], woraus zunächst

$$F_i(M) \equiv 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

folgt. Nun fixieren wir eine Hyperebene $E^3_{u_0}$ mit dem Normalenvektor u_0 so, dass M ganz im Inneren des durch u_0 bestimmten Halbraumes liegt. Die $2n$ Seitenflächen $(M;\, u_i)$ von M seien so durchnumeriert, dass $u_i\, u_0 > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Dann lässt sich M darstellen durch

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = M + \sum_{i=1}^{n} T_{n+i}, \tag{2}$$

wobei T_i eine «Projektionssäule» ist mit dem in $E^3_{u_0}$ liegenden «Grundflächenpolyeder» P_i, welches die orthogonale Projektion des «Deckflächenpolyeders» $(M;\, u_i)$ darstellt. Bei geeigneter Numerierung (P_i translationsgleich P_{n+i} für $i = 1, \ldots, n$) lassen sich unter unseren Voraussetzungen die Differenzen $T_i - T_{n+i} = (P_i, h_i)$ bilden $(i = 1, \ldots, n)$, so dass (2) übergeht in

$$M \sim \sum_{1}^{n} (P_i, h_i)\,.$$

Hilfssatz 7 liefert

$$2M \sim \sum_{1}^{n} (2\,P_i, 2\,h_i)\,. \tag{3}$$

Hilfssatz 6 übertragen auf den dreidimensionalen Fall $(P_i \subset E^3_{u_0})$, liefert

$$2\,P_i \sim 2 \circ P_i + Z_i\,, \tag{4}$$

wo Z_i ein Polyeder aus $\boldsymbol{Z}_2'$ (zweite Zylinderklasse bzgl. $E^3_{u_0}$) ist. Berücksichtigen wir, dass die Zentralsymmetrie von $(M;\, u_i)$ bei der Orthogonalprojektion auf $E^3_{u_0}$ erhalten bleibt, so erhellt, dass P_i zentralsymmetrisch ist und mithin

$$F_2'(P_i) \equiv 0 \tag{5}$$

gilt. Da auch Hilfssatz 3 sinngemäss für den dreidimensionalen Fall gilt (vgl. [5])' folgt aus (4)

$$F_2'(2\,P_i) = F_2'\,(2 \circ P_i) + F_2'(Z_i)\,,$$

mit (5) also $F_2'(Z_i) \equiv 0$. Daraus und aus $Z_i \in \boldsymbol{Z}_2'$ ergibt sich ([5], S. 203) $Z_i \sim W_i'$, wo W_i' ein geeigneter in $E^3_{u_0}$ liegender Würfel ist. (3) und (4) liefern also insgesamt

$$\left.\begin{aligned}
&2M \sim \sum (2 \circ P_i + W_i', 2\,h_i)\,,\\
&2M \sim \sum (2 \circ P_i, 2\,h_i) + \sum (W_i', 2\,h_i)\,,\\
&2M \sim 2^2 \circ \sum (P_i, h_i) + \sum (W_i', 2\,h_i) \text{ bzw.}\\
&2M \sim 2^2 \circ M + W_1^4 \text{ mit } W_1^4 \in \boldsymbol{Z}_4\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nach Hilfssatz 9 gilt ferner

$$(P_i, h_i) + X_i \sim (P_i', h) + Y_i\,,$$

wo h eine fest gegebene positive reelle Zahl (Strecke) ist, $P_i' = (h_i/h) \cdot P_i$ und X_i, $Y_i \in \boldsymbol{Z}_3$ gilt. Daraus folgt

$$\sum (P_i, h_i) + \sum X_i \sim \sum (P_i', h) + \sum Y_i \quad \text{bzw.} \quad M + X \sim (Q, h) + Y\,. \tag{7}$$

Dabei ist $X, Y \in \boldsymbol{Z}_3$ und (Q, h) ein gerades Prisma mit der Grundfläche $Q = \Sigma P_i' \subset E^3_{u_0}$. Unter Beachtung von (5) ergibt sich noch $F_2'(P_i) = F_2'(P_i') \equiv 0$ bzw.

$$F_2'(Q) \equiv 0\,. \tag{8}$$

Ferner folgt aus (7)

$$F_2(M) + F_2(X) = F_2(Q, h) + F_2(Y)$$

und daraus mit (1) und Hilfssatz 5 $F_2(Q, h) \equiv 0$, nach Hilfssatz 8 also $h \cdot F_1'(Q) \equiv 0$ bzw. $F_1'(Q) \equiv 0$. Zusammen mit (8) schliessen wir daraus wie oben auf die Existenz eines geeigneten Elementes W_2^4 aus $\boldsymbol{Z}_4$ mit $(Q, h) \sim W_2^4$. Es gilt also statt (7) sogar

$$M + X \sim W_2^4 + Y\,. \tag{9}$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von Hilfssatz 6 und 7

$$\left.\begin{aligned} &2M + 2X \sim 2W_2^4 + 2Y \quad \text{bzw.} \\ &2M + 2^3 \circ X + U_1 \sim 2^4 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y + U_2 \quad (U_1, U_2 \in \boldsymbol{Z}_4)\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

andererseits folgt aus (9) aber

$$2^3 \circ M + 2^3 \circ X \sim 2^3 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y\,,$$

so dass sich mit Hilfssatz 1 und 2 aus (10) ergibt:

$$2M + 2^3 \circ X + U_1 + 2^3 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y \sim 2^4 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y + U_2 + 2^3 \circ M + 2^3 \circ X$$

bzw.

$$2M + U_1 \sim 2^3 \circ M + 2^3 \circ W_2^4 + U_2\,.$$

Da es sicher ein W_3^4 aus $\boldsymbol{Z}_4$ gibt mit

$$W_3^4 + U_1 \sim 2^3 \circ W_2^4 + U_2\,,$$

gilt sogar

$$2M \sim 2^3 \circ M + W_3^4\,. \tag{11}$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit (6), so ergibt sich

$$2^3 \circ M + W_3^4 \sim 2^2 \circ M + W_1^4 \quad \text{bzw.} \quad 2^2 \circ M + W_3^4 \sim W_1^4\,.$$

Wegen $W_1^4, W_3^4 \in \boldsymbol{Z}_4$ und $F_4(W_1^4) > F_4(W_3^4)$ gibt es aber sicher einen vierdimensionalen Würfel λW mit $W_3^4 + 2^2 \circ \lambda W \sim W_1^4$, so dass $2^2 \circ M \sim 2^2 \circ \lambda W$, nach Hilfssatz 7 also $M \sim \lambda W$ gilt, womit $\boldsymbol{S}^4 \subset \boldsymbol{W}^4$, insgesamt also $\boldsymbol{S}^4 = \boldsymbol{W}^4$ bewiesen ist.

Eike Hertel, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, DDR

LITERATUR

[1] H. HADWIGER, *Polytopes and Translative Equidecomposability*, Amer. Math. Monthly *79*, 275–276 (1972).

[2] H. HADWIGER, *Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit*, Math. Nachr. *8*, 53–58 (1952).

[3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer (Berlin 1957).

[4] H. HADWIGER, *Translationsinvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale*, Arch. Math. *3*, 387–394 (1952).

[5] H. HADWIGER, *Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder des gewöhnlichen Raumes*, J. reine angew. Math. *233*, 200–212 (1968).

[6] E. HERTEL, *Zur translativen Zerlegungsgleichheit n-dimensionaler Polyeder*, Publ. Math. Debrecen (im Druck).

[7] B. JESSEN, *Zur Algebra der Polytope*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. II. *4*, 47–53 (1972).

A Criterion for n-Fold Transitivity of Transformation Groups

Let G be a group and let X be a nonempty set. An *action* $*$ on X is a function $*$: $G \times X \to X$ such that for every $g, h \in G$ and $x \in X$, (*i*) $(gh) * x = g * (h * x)$ and (*ii*) $1 * x = x$.

A triple $(G, X, *)$ where $*$ is an action of G on X is called a *transformation group*. For $S \subseteqq X$ the stability subgroup of S is $G_S = \{g \in G \mid g * s = s \text{ for every } s \in S\}$. (We will write G_x instead of $G_{\{x\}}$.)

If n is a positive integer, we say that G is *n-fold transitive* whenever for every two sequences $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and $y_1, y_2, \ldots, y_n$ each consisting of n distinct elements of X, there exists $g \in G$ such that $g * x_i = y_i$ for every $_i = 1, 2, \ldots, n$.

We note that if $*$ is an action of G on X, then for any $S \subseteqq X$, $*$ induces an action of G_S on $X - S$.

The next theorem is well known (see, for example, [1], Theorem 9.1).

Theorem 1: Let $(G, X, *)$ be transitive. Then for $n \geq 2$, $(G, X, *)$ is n-fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $(G_x, X - \{x\}, *)$ is $(n-1)$-fold transitive.

It is our purpose in this note to derive a corollary (Theorem 2) of this theorem which is sometimes more convenient to use. The essential idea is to replace the transitive condition on $(G, X, *)$ by a restriction on the stability subgroups.

Lemma 1: If $(G, X, *)$ is a transformation group, then $(G, X, *)$ is 2-fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is transitive.

Proof: Clearly if $(G, X, *)$ is 2-fold transitive then the given condition holds for any $x \in X$.

Now suppose $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is transitive. Let $y, z \in X$. If $y, z \in X - \{x\}$, then there exists $g \in G_x$ such that $g * y = z$. If $y = z = x$, then $1 * y = z$. If $y = x$ and $z \neq x$, then since $G_x \neq G$, there exists $h \in G$ such that $h * x \neq x$. So there is an $r \in G_x$ such that $r * (h * x) = z$ and so $(rh) * x = z$. If $y \neq x$, $z = x$ and h is as before, then there exists $t \in G_x$ such that $t * y = h * x = h * z$ so that $(h^{-1} t) * y = z$. Hence $(G, X, *)$ is transitive so that by Theorem 1 it is 2-fold transitive.

Lemma 2: Let $n \geq 2$ and $|X| > 1$. Then $(G, X, *)$ is n-fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is $(n-1)$-fold transitive.