

# Der "gefährliche" Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

Autor(en): **Baier, O. / Vinzenz, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29898>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 29

Heft 4

Seiten 81–104

10. Juli 1974

## Der «gefährliche» Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

1. Beim räumlichen Rückwärtseinschnitt handelt es sich um die Aufgabe, durch ein Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  ein Dreikant mit gegebenen Winkeln (Spitze  $S$ ) zu legen. Die Strecke  $A_i A_j$  erscheint in einer Ebene stets unter demselben Winkel, wenn sie aus den Punkten zweier zu  $A_i A_j$  symmetrischer, kongruenter Kreisbögen (Endpunkte  $A_i$  und  $A_j$ ) beobachtet wird (Peripheriewinkelsatz). Im Raum tritt an die Stelle der beiden Kreisbögen die Torusfläche, die durch Rotation dieser Bögen um die Achse  $A_i A_j$  entsteht. Als mögliche Lagen der Dreikantspitze  $S$  ergeben sich somit die gemeinsamen Punkte der den Dreikantwinkeln zugeordneten Torusflächen. In einem solchen Punkt treffen sich die drei Schnittkurven je zweier Torusflächen<sup>1)</sup>. Man nennt ihn «gefährlichen» Punkt, wenn die drei Schnittkurven sich im gemeinsamen Punkt *berühren*, d.h. dieselbe Tangente haben. S. Finsterwalder [1] bewies den Satz: *Die gefährlichen Punkte sind gerade die Punkte des über dem Umkreis des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  errichteten Drehzylinders*. Dieser Satz ist im Lauf der Zeit mehrfach abgeleitet worden [2], [3], [4]. Die Verfasser waren bestrebt, den Beweisgang mit möglichst elementaren Hilfsmitteln zu vereinfachen und fanden dabei interessante und schöne Zusammenhänge. Der räumliche Rückwärtseinschnitt spielt in der Satellitengeodäsie eine wichtige Rolle: Die Lage der Stationen  $A_1, A_2, A_3$  sei bekannt. Wird von ihnen aus ein Satellit  $S$  gleichzeitig gegen den Fixsternhimmel photographiert, so lassen sich aus je zwei dieser Aufnahmen die Winkel  $A_i S A_j$  ermitteln und durch den Rückwärtseinschnitt der Ort von  $S$  im Raum zu diesem Zeitpunkt. Gleichzeitige Aufnahme von  $S$  aus einer Station  $A_4$  ergibt die Lage des Strahles  $S A_4$  im Bündel  $S$ . Jeweils gleichzeitige Aufnahmen der Bahn von  $S$  aus weiteren Stationen ergeben somit deren räumliche Lage in bezug auf  $A_1, A_2, A_3$ <sup>2)</sup>. Die folgenden Überlegungen<sup>3)</sup> wollen eine Verbindung herstellen zwischen dem Satz von Finsterwalder und allgemeinen Sätzen der Raumgeometrie.

2. Die Tangente im Punkt  $S$  einer Schnittkurve zweier Flächen steht auf den in  $S$  errichteten Flächennormalen senkrecht. In einem gefährlichen Punkt  $S$  stehen

<sup>1)</sup> Die Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschnitts behandelt schon G. MONGE (*Géométrie descriptive*, S. 124 ff., Paris 1811 [Ostwald's Klassiker Nr. 117, herausgegeben von R. HAUSSNER, S. 135 ff.], Leipzig 1900).

<sup>2)</sup> Vgl. hierzu z. B. H. DEKER, *Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodäsie*, Veröffentlichungen der Bayer. Akad. d. Wiss., Reihe C Nr. 111 (München 1967).

<sup>3)</sup> Vom erstgenannten Verfasser stammen die Beweise 5 und 7 b. Den Beweis 5 hat er – mit geringen Änderungen – in seinen Vorlesungen über Konstruktive Geometrie (für Mathematiker und Geodäten) an der TU München als Anwendung der stereographischen Projektion vorgetragen.

demnach die *drei* Torusnormalen auf der Schnittkurventangente senkrecht, d.h. *sie liegen in einer Ebene*. Die Torusnormalen sind Durchmesser der Umkreise der Seitendreiecke  $SA_i A_j$  des Tetraeders  $SA_1 A_2 A_3$ . Der der Spitze  $S$  im Dreieck  $SA_i A_j$  gegenüberliegende Durchmesserendpunkt sei mit  $B_k$  bezeichnet. Dann gilt offenbar:

$S$  ist gefährlicher Punkt  $\Leftrightarrow S$  liegt in der Ebene  $B_1 B_2 B_3$ ,  $S \in B_1 B_2 B_3$ .

Auch die Bedingung « $S$  liegt auf dem gefährlichen Zylinder» entspricht einer Inzidenz ( $S^*$  sei der Gegenpunkt von  $S$  auf der Umkugel von  $SA_1 A_2 A_3$ ):

$$S^* \in A_1 A_2 A_3.$$

In der Tat liegt  $S^*$  genau dann auf dem Umkreis von Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  (und damit in der Ebene  $A_1 A_2 A_3$ ), wenn sich der Gegenpunkt  $S$  senkrecht über dem Umkreis, also auf dem gefährlichen Zylinder befindet. Damit lautet der Satz von Finsterwalder:

$$S \in B_1 B_2 B_3 \Leftrightarrow S^* \in A_1 A_2 A_3. \quad (F)$$

3. Die beiden Tetraeder  $SA_1 A_2 A_3$  und  $S^* B_1 B_2 B_3$  kann man noch in anderer Weise kennzeichnen. Durch die Punkte  $A_i$  werden die Lotebenen zu  $SA_i$  gelegt. Sie sind die Ebenen eines zu dem Dreikant  $SA_1 A_2 A_3$  «polaren» Dreikants. Ihre Schnittgeraden treffen die Seitenflächen  $SA_i A_j$  senkrecht in den Umkreispunkten  $B_k$ . Ihr gemeinsamer Punkt ist  $S^*$ . Der Mittelpunkt  $M$  der Umkugel von  $SA_1 A_2 A_3$  liegt auf dem Lot zur Ebene  $SA_i A_j$  im Mittelpunkt  $M_k$  von  $SB_k$ .  $M_k$  ist Umkreismittelpunkt von  $SA_i A_j$ <sup>4)</sup>.  $S^*$  bildet also mit  $S$  einen Durchmesser der beiden Tetraedern  $SA_1 A_2 A_3$  und  $S^* B_1 B_2 B_3$  gemeinsamen Umkugel. Der Umkreis von  $SA_i A_j$  schneidet den Grosskreis  $SB_k S^*$  senkrecht, weil  $SB_k$  Umkreisdurchmesser ist.

Aufgrund der Konstruktion erfüllen die Ecken der beiden Tetraeder die sechs Lagebeziehungen

$$B_i \in SA_j A_k, \quad A_i \in S^* B_j B_k. \quad (J)$$

( $B_i$  liegt auf dem Umkreis von  $SA_j A_k$ . Die Ebene  $S^* B_j B_k$  steht in  $A_i$  auf  $SA_i$  senkrecht.)

Die acht Inzidenzen (F) und (J) besagen: Die Ecken eines jeden der beiden Tetraeder liegen in den Ebenen des anderen. Für solche Tetraeder hat A. F. Möbius [5], [6] bewiesen, *dass aus irgend sieben dieser Inzidenzen die achte folgt*, wie es der Satz (F) von Finsterwalder behauptet.

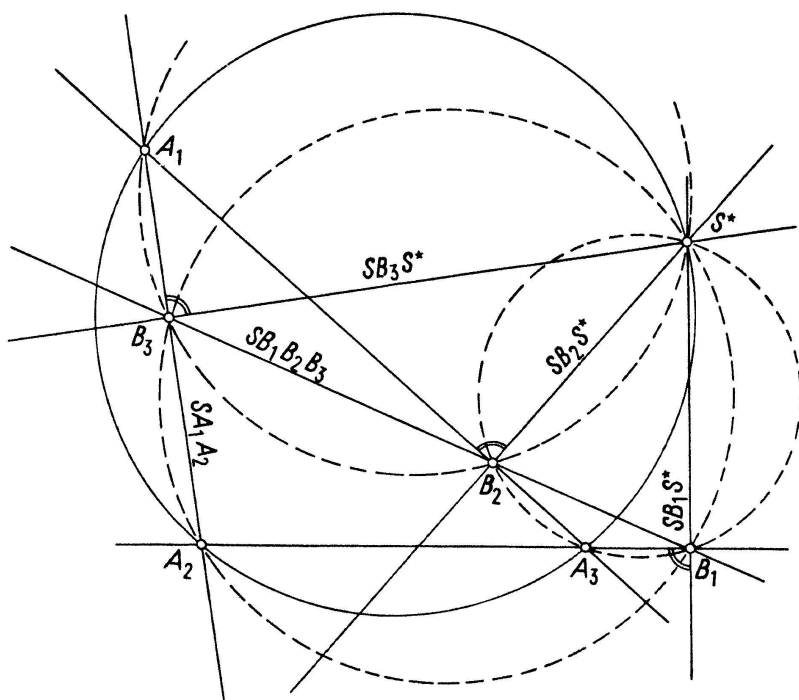
4. Die acht Umkreise der Tetraederdreiecke  $SA_i A_j$ ,  $A_1 A_2 A_3$ ,  $S^* B_i B_j$ ,  $B_1 B_2 B_3$  enthalten je vier Ecken, durch jede Ecke gehen vier Umkreise. Die Inzidenzen (J) und (F) sind zu lesen:  $B_i$  liegt auf dem Umkreis von  $SA_j A_k$  usw. Die durch diese Lagebeziehungen beschriebene Kreisanordnung entspricht einem nach Clifford [7] benannten Satz: Vier Kreise (einer Kugel oder Möbius-Ebene) durch einen Punkt  $S$  schneiden sich in sechs Punkten  $A_i$  und  $B_i$ , wobei  $S$  auf den Kreisen  $B_i A_j A_k$  und  $B_1 B_2 B_3$  liegt. Dann laufen auch die vier Kreise  $A_i B_j B_k$  und  $A_1 A_2 A_3$  durch einen Punkt  $S^*$ .

$$B_i \in SA_j A_k, \quad S \in B_1 B_2 B_3 \Leftrightarrow A_i \in S^* B_j B_k, \quad S^* \in A_1 A_2 A_3.$$

<sup>4)</sup> Einfache Konstruktion von  $M_k$ : Schnitt der Lote auf  $SA_i$  in  $A_i$  und auf  $SA_j$  in  $A_j$  ist  $B_k$ .  $\overline{SM}_k = 1/2 \overline{SB}_k$ .

Die gesuchte Inzidenz  $S^* \in A_1 A_2 A_3$  erhalten wir nach Möbius aus sieben, nach Clifford aus vier Inzidenzen: eine Folge der gemeinsamen Umkugel.

5. Durch eine Inversion projizieren wir die Umkreise der Tetraeder  $SA_1 A_2 A_3$  und  $S^* B_1 B_2 B_3$  so in eine Möbius-Ebene, dass  $S$  auf den Fernpunkt, alle Kreise durch  $S$  als Geraden abgebildet werden<sup>5)</sup> (Figur). In die Cliffordsche Kreiskonfiguration sind die Bilder der drei Grosskreise  $SB_i S^*$  eingezeichnet. Sie erscheinen als Gerade, die nach der Bemerkung in Abschnitt 3 auf den Bildgeraden der Kreise  $SA_j A_k$  senkrecht stehen. Nach dem Satz von Simson-Wallace liegen die Fusspunkte  $B_i$  der Lote  $SB_i S^*$  auf die Geraden  $A_j A_k$  genau dann auf einer Geraden (d.h.  $S \in B_1 B_2 B_3!$ ), wenn  $S^*$  auf dem Umkreis von  $A_1 A_2 A_3$  liegt. Um  $S^* \in A_1 A_2 A_3$  zu zeigen, braucht man sich also nicht auf den Satz von Clifford berufen. Es genügt der elementar beweisbare Satz von Wallace.



6. Wenn  $S$  auf dem gefährlichen Zylinder liegt, sind die Fusspunkte der durch  $S$  gehenden Höhen der Seitendreiecke  $SA_i A_j$  kollinear (Wallace-Gerade von  $S'$  im Dreieck  $A_1 A_2 A_3$ ,  $S'$  senkrechte Projektion von  $S$  auf  $A_1 A_2 A_3$ ), d.h. die Höhen liegen in einer Ebene. Der Satz von Finsterwalder kann daher auch so formuliert werden:

Wenn im Tetraeder  $SA_1 A_2 A_3$  die Umkreisdurchmesser  $SB_k$  der Seitendreiecke  $SA_i A_j$  in einer Ebene liegen, dann sind auch die durch  $S$  (H) laufenden Höhen der Seitendreiecke komplanar, und umgekehrt.

Wenn  $S \in B_1 B_2 B_3$  gilt, dann liegt der Gegenpunkt  $S^*$  von  $S$  senkrecht über dem Umkreis von  $B_1 B_2 B_3$ . Die Höhen durch  $S^*$  der Dreiecke  $S^* B_i B_j$  sind folglich komplanar. Da  $S^* A_k$  Umkreisdurchmesser im Dreieck  $S^* B_i B_j$  ist (Polarkant!), sind bezüglich der Tetraeder  $SA_1 A_2 A_3$  und  $S^* B_1 B_2 B_3$  Behauptung und Voraussetzung von (H) gerade vertauscht.  $S$  und  $S^*$  sind immer gleichzeitig gefährliche Punkte.

7. Durch eine einfache Rechnung schliesst H. Stachel [4] durch Anwendung des Satzes von Menelaos aus  $S \in B_1 B_2 B_3$  auf die Kollinearität der Höhenfusspunkte der

<sup>5)</sup> Stereographische Projektion der Umkugel aus  $S$  in deren Berührebene in  $S^*$ .

Höhen der Dreiecke  $SA_iA_j$ . Statt durch Rechnung kann man den Beweis wie folgt erbringen:

a) Man fasst nicht das Dreieck  $A_1A_2A_3$ , sondern die Ecke  $S$  des Dreikants  $SA_1A_2A_3$  ins Auge. Es repräsentiert ein sphärisches Dreieck  $C_1C_2C_3$  auf einer Kugel mit Mittelpunkt  $S$ . (Die Ecke  $C_i$  liege auf der Geraden  $SA_i$ .) Auf der Kugel lautet der Satz von Menelaos: Die drei Punkte  $D_i$  der Grosskreise durch  $C_jC_k$  liegen genau dann auf einem Grosskreis, d.h. in einer Ebene durch  $S$ , wenn gilt

$$\frac{\sin C_2D_1}{\sin C_3D_1} \cdot \frac{\sin C_3D_2}{\sin C_1D_2} \cdot \frac{\sin C_1D_3}{\sin C_2D_3} = 1. \quad (M)$$

Also

$$(M) \Leftrightarrow S \in D_1D_2D_3.$$

Spiegelt man  $D_i$  am sphärischen Mittellot von  $C_jC_k$ , dann gehen für die Bildpunkte  $E_i$  die Faktoren in ihre Kehrwerte über ( $\sphericalangle D_iSC_j = -\sphericalangle E_iSC_k$ ), so dass das Produkt den Wert 1 behält. Die Bildpunkte  $E_i$  liegen also ebenfalls in einer Ebene durch  $S$ :  $S \in E_1E_2E_3$ . Nun ist in jedem Dreieck  $ABC$   $\sphericalangle(a, d_c) = -\sphericalangle(b, h_c)$ , wobei  $d_c$  den Umkreisdurchmesser mit Endpunkt  $C$ ,  $h_c$  die Höhe auf  $AB$  bezeichnet. Also ist auch in den Seitendreiecken  $SA_iA_j$   $\sphericalangle A_jSB_k = -\sphericalangle A_iSh(A_iA_j)$  und mit (M) folgt aus  $S \in B_1B_2B_3$ , dass die Höhen  $h(A_iA_j)$  in einer Ebene liegen und umgekehrt. Mithin gilt der Satz von Finsterwalder in der zuletzt gegebenen Formulierung (H).

b) Im Dreieck  $SA_iA_j$  sei  $B'_k = SB_k \cap A_iA_j$ ,  $H_k$  der Fusspunkt der Höhe durch  $S$ ,  $W_k$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in  $S$  mit  $A_iA_j$ . Dann gilt wegen der Winkelbeziehung (s.o. 7a) für die Doppelverhältnisse

$$(A_iA_jB'_kW_k) = (A_jA_iH_kW_k)$$

und für die Teilverhältnisse

$$(A_iA_jB'_k) = (A_jA_iH_k) (A_iA_jW_k)^2 = (A_jA_iH_k) \cdot (a_i:a_j)^2, SA_i = a_i, i = 1, 2, 3.$$

Nach Voraussetzung  $S \in B_1B_2B_3$  sind  $B'_1, B'_2, B'_3$  kollinear. Der Satz von Menelaos ergibt

$$1 = (A_1A_2B'_3) (A_2A_3B'_1) (A_3A_1B'_2) = (A_2A_1H_3) (A_3A_2H_1) (A_1A_3H_2).$$

Damit sind auch  $H_1, H_2, H_3$  kollinear und umgekehrt.

O. Baier und W. Vinzenz, München

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. FINSTERWALDER, *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie*, Jb. dtsh. Math. Ver. 6, 1–44 (1899).
- [2] W. WUNDERLICH, *Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt*, Jber. dtsh. Math. Ver. 53, 41–48 (1943).
- [3] J. KRAMES, *Elementargeometrischer Nachweis des «gefährlichen» Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt*, El. Math. 10, 106–108 (1955).
- [4] H. STACHEL, *Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtseinschnitt*, El. Math. 19, 34–37 (1964).
- [5] A. F. MÖBIUS, *Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heißen?* Crelle's Journal Bd. 3, 273–278 (1828); Gesammelte Werke 1. Bd., 439–446 (Leipzig 1885).
- [6] W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie*, 3. Aufl., S. 165–184 (Basel 1954).
- [7] H. S. M. COXETER, *Unvergängliche Geometrie*, 318 (Basel 1963).