

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

From this it follows that  $f(x) = -f(x^{-1})$  or  $f(x) = -\omega f(x^{-1})$  or

$$f(x) = -\omega^2 f(x^{-1}).$$

It is not necessary that  $f(x) = -f(x^{-1})$  for each  $x$  in  $G$ . This shows some of the difficulties in the problem of determining the solution of (2) when  $f$  is complex-valued.

Ih-ching Hsu, St. Olaf College, Northfield, MN, USA

#### REFERENCES

- [1] J. ACZÉL, *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York-London 1966).  
 [2] N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 3 (Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964).  
 [3] O. TAUSSKY, *Sums of Squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.

## Kleine Mitteilungen

### Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte

Die Hüllkurve der Geraden, die aus zwei Kegelschnitten  $k_1, k_2$  Sehnen gleicher Länge ausschneiden, heiße die Chordalkurve von  $k_1$  und  $k_2$ .

1. **Die Chordalparabel zweier Kreise**  $k_1, k_2$  (Mittelpunkte  $K_1, K_2$ , Radien  $r_1, r_2$ ). Es sei  $K_1 \neq K_2$ . Mittelpunkt von  $K_1 K_2$  sei  $F$ . Die Chordale von  $k_1$  und  $k_2$  sei  $s$ . Eine Gerade  $g$  habe von  $K_1$  bzw.  $K_2$  die Abstände  $p_1$  bzw.  $p_2$ . Die Normale aus  $F$  auf  $g$  schliesse mit  $K_1 K_2$  den Winkel  $\alpha$  ein und schneide  $s$  im Punkt  $G$ . Es ist  $\overline{FG} = (p_1 + p_2)/2$ . Die von  $g$  aus  $k_1$  und  $k_2$  geschnittenen Sehnen sind gleich lang, wenn  $r_1^2 - p_1^2 = r_2^2 - p_2^2$  ist. Daraus folgt  $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = r_2^2 - r_1^2$  oder  $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{K_1 K_2} \cdot \cos \alpha = r_2^2 - r_1^2$ ; daher ist  $\overline{FG} \cdot \cos \alpha$  konstant. Alle  $G$  liegen auf  $s$ , denn für  $\alpha = 0$  ist  $g \equiv s$ . Es folgt:

**Satz 1.** *Alle Geraden, die die (nichtkonzentrischen) Kreise  $k_1, k_2$  nach längengleichen Sehnen schneiden, umhüllen für  $r_1 \neq r_2$  die «Chordalparabel»  $p$  von  $k_1$  und  $k_2$  (Brennpunkt  $F$ , Scheiteltangente  $s$ ).  $p$  berührt auch die gemeinsamen Tangenten von  $k_1$  und  $k_2$ . Für  $r_1 = r_2$  zerfällt  $p$  (als Klassenkurve) in das Strahlbüschel  $F$  und in das Büschel der zu  $K_1 K_2$  parallelen Geraden.*

$g$  schneidet nur dann reelle Sehnen aus  $k_1$  und  $k_2$ , wenn  $|r_1 - r_2| \leq 2 \cdot \overline{FG} \leq r_1 + r_2$  ist; die Intervallgrenzen gehören zu den gemeinsamen Tangenten von  $k_1$  und  $k_2$ ; existieren 4 bzw. 2 bzw. 0 reelle gemeinsame Tangenten von  $k_1$  und  $k_2$ , so gibt es 2 bzw. 1 bzw. 0 Bögen auf  $p$ , deren Punkte Tangenten  $g$  mit reellen Sehnen von  $k_1$  und  $k_2$  besitzen.

Da  $p$  durch  $F$  und  $s$  bestimmt ist, gilt die Umkehrung von Satz 1:

**Satz 2.** *Eine Parabel  $p$  ist Chordalparabel je zweier Kreise, die sich auf der Scheiteltangente von  $p$  schneiden und deren Mitten auf der Parabelachse symmetrisch zum Brennpunkt von  $p$  liegen.*

2. **Die Chordalgeraden dreier Kreise**  $k_i$  (Mitten  $K_i$ , Radien  $r_i$ ). Die Chordalparabel von  $k_i$  und  $k_j$  sei  $p_{ij}$  (Brennpunkt  $F_{ij} =$  Mitte von  $K_i K_j$ , Scheiteltangente  $s_{ij} =$  Chordale von  $k_i$  und  $k_j$ ). Eine eigentliche gemeinsame Tangente von  $p_{12}$  und  $p_{13}$  schneidet  $k_1$  und  $k_2$ , ebenso  $k_1$  und  $k_3$ , daher auch  $k_2$  und  $k_3$  nach längengleichen Sehnen. Sie berührt also auch  $p_{23}$ . Eine solche Gerade, die die  $k_i$  nach drei längengleichen Sehnen schneidet, heiße eine Chordalgerade der  $k_i$ .

**Satz 3.** Die drei Chordalparabeln, die von drei Kreisen  $k_i$  paarweise bestimmt werden, gehören einer linearen Schar an. Sind  $K_1, K_2, K_3$  nicht kollinear, so haben die  $k_i$  drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Chordalgeraden, nämlich die eigentlichen Grundtangente der Schar. Sie bilden (nach dem Satz von Lambert) ein Dreieck, dessen Umkreis der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks  $K_1K_2K_3$  ist. Für  $r_1 = r_2 = r_3$  sind  $F_{12}F_{23}, F_{23}F_{31}, F_{31}F_{12}$  die Chordalgeraden.

**Satz 4.** Liegen  $K_1, K_2, K_3$  auf einer Geraden, so gibt es i. allg. zwei Chordalgeraden der  $k_i$ . Sie gehen durch das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum  $A$  der drei Chordalparabeln. Für  $r_1 = r_2 = r_3$  ist  $A$  Fernpunkt, und jede Gerade durch  $A$  ist Chordalgerade der  $k_i$ .

3. Die Chordalkurve zweier beliebiger Kegelschnitte  $k_1$  und  $k_2$ , die in homogenen kartesischen Koordinaten  $x_0, x_1, x_2$  (Ferngerade  $x_0 = 0$ ) durch  $\sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = 0$  bzw.  $\sum_{i,j=0}^2 b_{ij} x_i x_j = 0$  gegeben sind. Eine Gerade  $g$  ( $\sum_{i=0}^2 u_i x_i = 0$ ) schneidet  $k_1$  in zwei Punkten; für deren Abstand  $s_1$  ergibt sich

$$s_1^2 = -4 (u_1^2 + u_2^2) \cdot \sum A_{ij} u_i u_j / (a_{22} u_1^2 - 2a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_2^2)^2 \quad (1)$$

( $A_{ij}$  = algebraisches Komplement von  $a_{ij}$  in der Determinante  $A = |a_{ij}|_0^2$ ; man muss nicht  $A \neq 0$  voraussetzen). Nach (1) ist  $s_1 = 0$ , wenn  $g$  eine Tangente von  $k_1$  oder eine Minimalgerade ist. Der Nenner in (1) ergibt nullgesetzt das doppeltgezählte Paar der Fernpunkte von  $k_1$ . Ist  $s_1$  fest, so stellt (1) die Kurve dar, deren Tangenten aus  $k_1$  Sehnen von der Länge  $s_1$  ausschneiden. Sie ist i. allg. von 4. Klasse, jedoch von 2. Klasse, und zwar ein Kreis, wenn  $k_1$  ein Kreis ist (für  $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$  spaltet sich  $u_1^2 + u_2^2 = 0$ , das Paar der Minimalstrahlbüschel, ab).

$g$  schneide aus  $k_2$  eine Sehne von der Länge  $s_2$ . Die Bedingung  $s_1^2 = s_2^2$  ergibt aus (1) nach Abspaltung von  $u_1^2 + u_2^2 = 0$  (mit  $s_1^2 = s_2^2 = 0$ ) die Gleichung

$$(b_{22} u_1^2 - 2b_{12} u_1 u_2 + b_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum A_{ij} u_i u_j - (a_{22} u_1^2 - 2a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum B_{ij} u_i u_j = 0 \quad (2)$$

der Chordalkurve von  $k_1$  und  $k_2$ . Sie ist i. allg. von 6. Klasse.

Haben  $k_1$  und  $k_2$  einen Fernpunkt  $I$  gemein, so spaltet sich nach (2) das Strahlbüschel  $I$  doppeltzählend ab; es bleibt eine Chordalkurve 4. Klasse. Haben  $k_1$  und  $k_2$  beide Fernpunkte  $I, J$  gemein, so spalten sich nach (2) die Strahlbüschel  $I, J$  doppeltzählend ab. Normiert man dann  $b_{22} = a_{22}, b_{12} = a_{12}, b_{11} = a_{11}$ , so lautet die Chordalkurve

$$\sum (A_{ij} - B_{ij}) u_i u_j = 0. \quad (3)$$

Sie hat hier die Klasse 2 und ist wegen  $A_{00} - B_{00} = 0$  eine Parabel. Daher:

**Satz 5.** Die Chordalkurve zweier Kegelschnitte  $k_1, k_2$  mit gemeinsamen Fernpunkten  $I, J$  ist eine Parabel  $p$ . Sie berührt die gemeinsamen Tangente von  $k_1$  und  $k_2$  und die Verbindungsgerade  $s$  der beiden eigentlichen Schnittpunkte von  $k_1$  und  $k_2$ . Die Fernpunkte von  $s$  und  $p$  liegen harmonisch zu  $I$  und  $J$ . Ist  $I = J$ , sind also  $k_1$  und  $k_2$  Parabeln mit parallelen Achsen, so ist ihr Fernpunkt auch Fernpunkt von  $p$ . (Im Fall  $I \neq J$  ist Satz 5 affine Verallgemeinerung von Satz 1.)

Fritz Hohenberg, Graz