From this it follows that $f(x) = -f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega^2 f(x^{-1})$.

It is not necessary that $f(x) = -f(x^{-1})$ for each $x$ in $G$. This shows some of the difficulties in the problem of determining the solution of (2) when $f$ is complex-valued.

Ih-ching Hsu, St. Olaf College, Northfield, MN, USA

REFERENCES

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York-London 1966).

[2] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 3 (Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964).

[3] O. Taussky, *Sums of Squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.

# Kleine Mitteilungen

## Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte

Die Hüllkurve der Geraden, die aus zwei Kegelschnitten $k_1$, $k_2$ Sehnen gleicher Länge ausschneiden, heisse die Chordalkurve von $k_1$ und $k_2$.

1. **Die Chordalparabel zweier Kreise** $k_1$, $k_2$ (Mittelpunkte $K_1$, $K_2$, Radien $r_1, r_2$). Es sei $K_1 \neq K_2$. Mittelpunkt von $K_1 K_2$ sei $F$. Die Chordale von $k_1$ und $k_2$ sei $s$. Eine Gerade $g$ habe von $K_1$ bzw. $K_2$ die Abstände $p_1$ bzw. $p_2$. Die Normale aus $F$ auf $g$ schliesse mit $K_1 K_2$ den Winkel $\alpha$ ein und schneide $s$ im Punkt $G$. Es ist $\overline{FG} = (p_1 + p_2)/2$. Die von $g$ aus $k_1$ und $k_2$ geschnittenen Sehnen sind gleich lang, wenn $r_1^2 - p_1^2 = r_2^2 - p_2^2$ ist. Daraus folgt $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = r_2^2 - r_1^2$ oder $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{K_1 K_2} \cdot \cos\alpha = r_2^2 - r_1^2$; daher ist $\overline{FG} \cdot \cos\alpha$ konstant. Alle $G$ liegen auf $s$, denn für $\alpha = 0$ ist $g \equiv s$. Es folgt:

**Satz 1.** *Alle Geraden, die die (nichtkonzentrischen) Kreise $k_1$, $k_2$ nach längengleichen Sehnen schneiden, umhüllen für $r_1 \neq r_2$ die «Chordalparabel» $p$ von $k_1$ und $k_2$ (Brennpunkt $F$, Scheiteltangente $s$). $p$ berührt auch die gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$.* Für $r_1 = r_2$ zerfällt $p$ (als Klassenkurve) in das Strahlbüschel $F$ und in das Büschel der zu $K_1 K_2$ parallelen Geraden.

$g$ schneidet nur dann reelle Sehnen aus $k_1$ und $k_2$, wenn $|r_1 - r_2| \leqq 2 \cdot \overline{FG} \leqq r_1 + r_2$ ist; die Intervallgrenzen gehören zu den gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$; existieren 4 bzw. 2 bzw. 0 reelle gemeinsame Tangenten von $k_1$ und $k_2$, so gibt es 2 bzw. 1 bzw. 0 Bögen auf $p$, deren Punkte Tangenten $g$ mit reellen Sehnen von $k_1$ und $k_2$ besitzen.

Da $p$ durch $F$ und $s$ bestimmt ist, gilt die Umkehrung von Satz 1:

**Satz 2.** *Eine Parabel $p$ ist Chordalparabel je zweier Kreise, die sich auf der Scheiteltangente von $p$ schneiden und deren Mitten auf der Parabelachse symmetrisch zum Brennpunkt von $p$ liegen.*

2. **Die Chordalgeraden dreier Kreise** $k_i$ (Mitten $K_i$, Radien $r_i$). Die Chordalparabel von $k_i$ und $k_j$ sei $p_{ij}$ (Brennpunkt $F_{ij}$ = Mitte von $K_i K_j$, Scheiteltangente $s_{ij}$ = Chordale von $k_i$ und $k_j$). Eine eigentliche gemeinsame Tangente von $p_{12}$ und $p_{13}$ schneidet $k_1$ und $k_2$, ebenso $k_1$ und $k_3$, daher auch $k_2$ und $k_3$ nach längengleichen Sehnen. Sie berührt also auch $p_{23}$. Eine solche Gerade, die die $k_i$ nach drei längengleichen Sehnen schneidet, heisse eine Chordalgerade der $k_i$.

**Satz 3.** *Die drei Chordalparabeln, die von drei Kreisen $k_i$ paarweise bestimmt werden, gehören einer linearen Schar an. Sind $K_1$, $K_2$, $K_3$ nicht kollinear, so haben die $k_i$ drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Chordalgeraden, nämlich die eigentlichen Grundtangenten der Schar. Sie bilden* (nach dem Satz von Lambert) *ein Dreieck, dessen Umkreis der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks $K_1K_2K_3$ ist.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ sind $F_{12}F_{23}$, $F_{23}F_{31}$, $F_{31}F_{12}$ die Chordalgeraden.

**Satz 4.** *Liegen $K_1$, $K_2$, $K_3$ auf einer Geraden, so gibt es i. allg. zwei Chordalgeraden der $k_i$. Sie gehen durch das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum $A$ der drei Chordalparabeln.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ ist $A$ Fernpunkt, und jede Gerade durch $A$ ist Chordalgerade der $k_i$.

3. **Die Chordalkurve zweier beliebiger Kegelschnitte** $k_1$ und $k_2$, die in homogenen kartesischen Koordinaten $x_0, x_1, x_2$ (Ferngerade $x_0 = 0$) durch $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$ bzw. $\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} x_i x_j = 0$ gegeben sind. Eine Gerade $g$ ($\sum_{i=0}^{2} u_i x_i = 0$) schneidet $k_1$ in zwei Punkten; für deren Abstand $s_1$ ergibt sich

$$s_1^2 = -4\,(u_1^2 + u_2^2) \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j / (a_{22} u_1^2 - 2 a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_2^2)^2 \tag{1}$$

($A_{ij}$ = algebraisches Komplement von $a_{ij}$ in der Determinante $A = |\,a_{ij}\,|_0^2$; man muss nicht $A \neq 0$ voraussetzen). Nach (1) ist $s_1 = 0$, wenn $g$ eine Tangente von $k_1$ oder eine Minimalgerade ist. Der Nenner in (1) ergibt nullgesetzt das doppeltgezählte Paar der Fernpunkte von $k_1$. Ist $s_1$ fest, so stellt (1) die Kurve dar, deren Tangenten aus $k_1$ Sehnen von der Länge $s_1$ ausschneiden. Sie ist i. allg. von 4. Klasse, jedoch von 2. Klasse, und zwar ein Kreis, wenn $k_1$ ein Kreis ist (für $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ spaltet sich $u_1^2 + u_2^2 = 0$, das Paar der Minimalstrahlbüschel, ab).

$g$ schneide aus $k_2$ eine Sehne von der Länge $s_2$. Die Bedingung $s_1^2 = s_2^2$ ergibt aus (1) nach Abspaltung von $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (mit $s_1^2 = s_2^2 = 0$) die Gleichung

$$\begin{aligned}&(b_{22} u_1^2 - 2 b_{12} u_1 u_2 + b_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j - (a_{22} u_1^2 - 2 a_{12} u_1 u_2 + \\ &+ a_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum B_{ij}\, u_i\, u_j = 0\end{aligned} \tag{2}$$

der Chordalkurve von $k_1$ und $k_2$. Sie ist i. allg. von 6. Klasse.

Haben $k_1$ und $k_2$ einen Fernpunkt $I$ gemein, so spaltet sich nach (2) das Strahlbüschel $I$ doppeltzählend ab; es bleibt eine Chordalkurve 4. Klasse. Haben $k_1$ und $k_2$ beide Fernpunkte $I, J$ gemein, so spalten sich nach (2) die Strahlbüschel $I, J$ doppeltzählend ab. Normiert man dann $b_{22} = a_{22}$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{11} = a_{11}$, so lautet die Chordalkurve

$$\sum (A_{ij} - B_{ij})\, u_i\, u_j = 0. \tag{3}$$

Sie hat hier die Klasse 2 und ist wegen $A_{00} - B_{00} = 0$ eine Parabel. Daher:

**Satz 5.** *Die Chordalkurve zweier Kegelschnitte $k_1$, $k_2$ mit gemeinsamen Fernpunkten $I$, $J$ ist eine Parabel $p$. Sie berührt die gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$ und die Verbindungsgerade $s$ der beiden eigentlichen Schnittpunkte von $k_1$ und $k_2$. Die Fernpunkte von $s$ und $p$ liegen harmonisch zu $I$ und $J$. Ist $I = J$, sind also $k_1$ und $k_2$ Parabeln mit parallelen Achsen, so ist ihr Fernpunkt auch Fernpunkt von $p$.* (Im Fall $I \neq J$ ist Satz 5 affine Verallgemeinerung von Satz 1.)

Fritz Hohenberg, Graz