Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

From this it follows that $f(x) = -f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega^2 f(x^{-1})$.

It is not necessary that $f(x) = -f(x^{-1})$ for each x in G. This shows some of the difficulties in the problem of determining the solution of (2) when f is complex-valued.

Ih-ching Hsu, St. Olaf College, Northfield, MN, USA

REFERENCES

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York-London 1966).
[2] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 3 (Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964).
[3] O. Taussky, *Sums of Squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.

Kleine Mitteilungen

Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte

Die Hüllkurve der Geraden, die aus zwei Kegelschnitten k_1, k_2 Sehnen gleicher Länge ausschneiden, heisse die Chordalkurve von k_1 und k_2.

1. **Die Chordalparabel zweier Kreise** k_1, k_2 (Mittelpunkte K_1, K_2, Radien r_1, r_2). Es sei $K_1 \neq K_2$. Mittelpunkt von $K_1 K_2$ sei F. Die Chordale von k_1 und k_2 sei s. Eine Gerade g habe von K_1 bzw. K_2 die Abstände p_1 bzw. p_2. Die Normale aus F auf g schliesse mit $K_1 K_2$ den Winkel α ein und schneide s im Punkt G. Es ist $\overline{FG} = (p_1 + p_2)/2$. Die von g aus k_1 und k_2 geschnittenen Sehnen sind gleich lang, wenn $r_1^2 - p_1^2 = r_2^2 - p_2^2$ ist. Daraus folgt $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = r_2^2 - r_1^2$ oder $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{K_1 K_2} \cdot \cos\alpha = r_2^2 - r_1^2$; daher ist $\overline{FG} \cdot \cos\alpha$ konstant. Alle G liegen auf s, denn für $\alpha = 0$ ist $g \equiv s$. Es folgt:

Satz 1. *Alle Geraden, die die (nichtkonzentrischen) Kreise k_1, k_2 nach längengleichen Sehnen schneiden, umhüllen für $r_1 \neq r_2$ die «Chordalparabel» p von k_1 und k_2 (Brennpunkt F, Scheiteltangente s). p berührt auch die gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2.* Für $r_1 = r_2$ zerfällt p (als Klassenkurve) in das Strahlbüschel F und in das Büschel der zu $K_1 K_2$ parallelen Geraden.

g schneidet nur dann reelle Sehnen aus k_1 und k_2, wenn $|r_1 - r_2| \leqq 2 \cdot \overline{FG} \leqq r_1 + r_2$ ist; die Intervallgrenzen gehören zu den gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2; existieren 4 bzw. 2 bzw. 0 reelle gemeinsame Tangenten von k_1 und k_2, so gibt es 2 bzw. 1 bzw. 0 Bögen auf p, deren Punkte Tangenten g mit reellen Sehnen von k_1 und k_2 besitzen.

Da p durch F und s bestimmt ist, gilt die Umkehrung von Satz 1:

Satz 2. *Eine Parabel p ist Chordalparabel je zweier Kreise, die sich auf der Scheiteltangente von p schneiden und deren Mitten auf der Parabelachse symmetrisch zum Brennpunkt von p liegen.*

2. **Die Chordalgeraden dreier Kreise** k_i (Mitten K_i, Radien r_i). Die Chordalparabel von k_i und k_j sei p_{ij} (Brennpunkt F_{ij} = Mitte von $K_i K_j$, Scheiteltangente s_{ij} = Chordale von k_i und k_j). Eine eigentliche gemeinsame Tangente von p_{12} und p_{13} schneidet k_1 und k_2, ebenso k_1 und k_3, daher auch k_2 und k_3 nach längengleichen Sehnen. Sie berührt also auch p_{23}. Eine solche Gerade, die die k_i nach drei längengleichen Sehnen schneidet, heisse eine Chordalgerade der k_i.

Satz 3. *Die drei Chordalparabeln, die von drei Kreisen k_i paarweise bestimmt werden, gehören einer linearen Schar an. Sind K_1, K_2, K_3 nicht kollinear, so haben die k_i drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Chordalgeraden, nämlich die eigentlichen Grundtangenten der Schar. Sie bilden* (nach dem Satz von Lambert) *ein Dreieck, dessen Umkreis der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks $K_1K_2K_3$ ist.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ sind $F_{12}F_{23}$, $F_{23}F_{31}$, $F_{31}F_{12}$ die Chordalgeraden.

Satz 4. *Liegen K_1, K_2, K_3 auf einer Geraden, so gibt es i. allg. zwei Chordalgeraden der k_i. Sie gehen durch das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum A der drei Chordalparabeln.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ ist A Fernpunkt, und jede Gerade durch A ist Chordalgerade der k_i.

3. **Die Chordalkurve zweier beliebiger Kegelschnitte** k_1 und k_2, die in homogenen kartesischen Koordinaten x_0, x_1, x_2 (Ferngerade $x_0 = 0$) durch $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$ bzw. $\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} x_i x_j = 0$ gegeben sind. Eine Gerade g $(\sum_{i=0}^{2} u_i x_i = 0)$ schneidet k_1 in zwei Punkten; für deren Abstand s_1 ergibt sich

$$s_1^2 = -4\,(u_1^2 + u_2^2) \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j / (a_{22}\, u_1^2 - 2a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{11}\, u_2^2)^2 \tag{1}$$

(A_{ij} = algebraisches Komplement von a_{ij} in der Determinante $A = |\, a_{ij} \,|_0^2$; man muss nicht $A \neq 0$ voraussetzen). Nach (1) ist $s_1 = 0$, wenn g eine Tangente von k_1 oder eine Minimalgerade ist. Der Nenner in (1) ergibt nullgesetzt das doppeltgezählte Paar der Fernpunkte von k_1. Ist s_1 fest, so stellt (1) die Kurve dar, deren Tangenten aus k_1 Sehnen von der Länge s_1 ausschneiden. Sie ist i. allg. von 4. Klasse, jedoch von 2. Klasse, und zwar ein Kreis, wenn k_1 ein Kreis ist (für $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ spaltet sich $u_1^2 + u_2^2 = 0$, das Paar der Minimalstrahlbüschel, ab).

g schneide aus k_2 eine Sehne von der Länge s_2. Die Bedingung $s_1^2 = s_2^2$ ergibt aus (1) nach Abspaltung von $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (mit $s_1^2 = s_2^2 = 0$) die Gleichung

$$(b_{22}\, u_1^2 - 2b_{12}\, u_1\, u_2 + b_{11}\, u_2^2)^2 \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j - (a_{22}\, u_1^2 - 2a_{12}\, u_1\, u_2 + \\ + a_{11}\, u_2^2)^2 \cdot \sum B_{ij}\, u_i\, u_j = 0 \tag{2}$$

der Chordalkurve von k_1 und k_2. Sie ist i. allg. von 6. Klasse.

Haben k_1 und k_2 einen Fernpunkt I gemein, so spaltet sich nach (2) das Strahlbüschel I doppeltzählend ab; es bleibt eine Chordalkurve 4. Klasse. Haben k_1 und k_2 beide Fernpunkte I, J gemein, so spalten sich nach (2) die Strahlbüschel I, J doppeltzählend ab. Normiert man dann $b_{22} = a_{22}$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{11} = a_{11}$, so lautet die Chordalkurve

$$\sum (A_{ij} - B_{ij})\, u_i\, u_j = 0. \tag{3}$$

Sie hat hier die Klasse 2 und ist wegen $A_{00} - B_{00} = 0$ eine Parabel. Daher:

Satz 5. *Die Chordalkurve zweier Kegelschnitte k_1, k_2 mit gemeinsamen Fernpunkten I, J ist eine Parabel p. Sie berührt die gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2 und die Verbindungsgerade s der beiden eigentlichen Schnittpunkte von k_1 und k_2. Die Fernpunkte von s und p liegen harmonisch zu I und J. Ist $I = J$, sind also k_1 und k_2 Parabeln mit parallelen Achsen, so ist ihr Fernpunkt auch Fernpunkt von p.* (Im Fall $I \neq J$ ist Satz 5 affine Verallgemeinerung von Satz 1.)

Fritz Hohenberg, Graz