Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 29 (1974)

Heft: 5

Artikel: Aufgaben

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29904

Aufgaben

Problem 700A. In ein «grosses» Quadrat sollen n «kleine» Quadrate der Seitenlängen $1, 2, \ldots, n$ seitenparallel so eingebettet werden, dass je zwei kleine Quadrate höchstens Randpunkte gemeinsam haben. $N(n)$ bezeichne die minimale Seitenlänge des grossen Quadrats, die diese Einbettung ermöglicht. Es ist nicht schwer, einzusehen, dass $N(n) \leq n^{3/2}$ für alle $n \geq 3$ gilt.

a) Lässt sich ein Faktor k, $0 < k < 1$, so angeben, dass schon $N(n) \leq k\, n^{3/2}$ gilt?

b) Kann der Exponent 3/2 verkleinert werden, so dass also $N(n) \leq n^q$ für ein $q < 3/2$ zutrifft?

c) Gilt eine dieser beiden Möglichkeiten wenigstens für genügend grosse n?

Die Antworten sind dem Aufgabensteller nicht bekannt. P. Wilker, Bern

Lösung (kombiniert nach den Einsendungen von H. Harborth [Braunschweig, BRD] und O. P. Lossers [Eindhoven, Niederlande]): Es ist $N(n) = (1/\sqrt{3})\, n^{3/2} + O(n)$. Somit kann $k = 1/\sqrt{3}$ angenommen, der Exponent 3/2 aber nicht verkleinert werden. Wir verwenden die Abkürzung $A(n) = (1/6)\, n\, (n+1)\, (2n+1)$; es wird gezeigt:

$$\sqrt{A(n)} \leq N(n) \leq \sqrt{A(n)} + \frac{3}{2}\, n\,,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Die linke Ungleichung ergibt sich sofort aus $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = A(n)$. Die rechte Ungleichung wird durch eine spezielle Lagerung der «kleinen» im «grossen» Quadrat induktiv bewiesen. Dazu betrachten wir ein Quadrat Q mit Seitenlänge $\sqrt{A(n)} + (3/2)\, n$. Wir nehmen 2 senkrechte Seiten von Q und zeichnen innerhalb Q 2 Reihen von $l := [n^{-1}(3^{-1/2}\, n^{3/2} + (3/2)\, n)]$ bzw. $l - 1$ Quadraten der Seitenlänge n wie in Fig. 1.

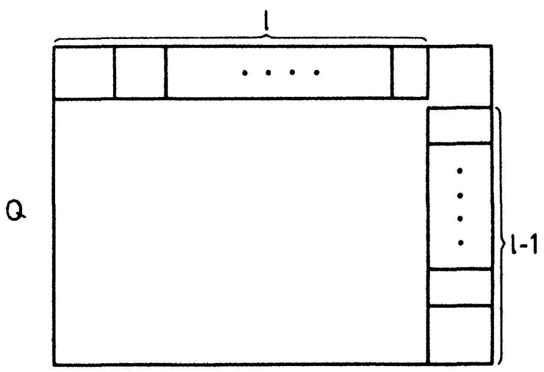

Fig. 1

Man kann dann noch im übrigen Teil von Q ein Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{A(n)} + (1/2)\, n$ einbetten.

Weil $2\,l - 1 > (2/\sqrt{3})\, n^{1/2}$, reicht es jetzt zu zeigen, dass

$$\sqrt{A(n)} + \frac{1}{2}\, n > \sqrt{A\left(n - \frac{2\, n^{1/2}}{\sqrt{3}}\right)} + \frac{3}{2}\left(n - \frac{2\, n^{1/2}}{\sqrt{3}}\right). \qquad (*)$$

Aus der Definition von $A(n)$ folgt leicht

$$\left(\frac{1}{3} n^{3/2} + \frac{1}{4} n^{1/2} - \frac{1}{96} n^{-1/2}\right)\sqrt{3} \leq \sqrt{A(n)} < \left(\frac{1}{3} n^{3/2} + \frac{1}{4} n^{1/2}\right)\sqrt{3} \qquad (n \geq 2)\,.$$

Wir verwenden die Ungleichungen

$$(1-d)^{3/2} < 1 - \frac{3}{2} d + \frac{1}{2} d^2\,, \qquad (1-d)^{1/2} < 1 - \frac{1}{2} d \qquad (d < 1)\,.$$

Es gilt

$$\sqrt{A\left(n - \frac{2\,n^{1/2}}{\sqrt{3}}\right)} - n^{1/2}\sqrt{3} < \left\{\frac{1}{3}\left(n - \frac{2\,n^{1/2}}{\sqrt{3}}\right)^{3/2} + \frac{1}{4}\left(n - \frac{2\,n^{1/2}}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} - n^{1/2}\right\}\sqrt{3}$$

$$= \left\{\frac{1}{3} n^{3/2}\left(1 - \frac{2\,n^{-1/2}}{3}\right)^{3/2} + \frac{1}{4} n^{1/2}\left(1 - \frac{2\,n^{-1/2}}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} - n^{1/2}\right\}\sqrt{3}$$

$$< \left\{\frac{1}{3} n^{3/2}\left(1 - n^{-1/2}\sqrt{3} + \frac{2}{3} n^{-1}\right) + \frac{1}{4} n^{1/2}\left(1 - \frac{n^{-1/2}}{\sqrt{3}}\right) - n^{1/2}\right\}\sqrt{3}$$

$$< \frac{n^{3/2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} n^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{96} n^{-1/2} - n < \sqrt{A(n)} - n\,,$$

also ist (*) bewiesen.

H. Harborth weist einerseits darauf hin, dass die Forderung des seitenparallelen Einlagerns überflüssig ist. Er bemerkt weiter, dass $N(n) = \{\sqrt{A(n)}\}$, wo $\{x\}$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$ bedeutet, für gewisse n eintreten kann und stellt die Frage, ob dies für beliebig viele n der Fall ist.

Weitere Lösungen sandten D. Stoffer (Biglen BE) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 701. Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 2. Im n-dimensionalen euklidischen Raum seien eine Hyperebene E und eine Projektionsrichtung r gegeben derart, dass r mit E einen Winkel vom Masse φ mit $0 < \varphi \leq \pi/2$ einschliesse. Es sei 0 eine Ecke eines beliebigen n-dimensionalen Würfels der Kantenlänge a. Man berechne die Quadratsumme der Längen der Projektionen auf E der von 0 ausgehenden Würfelkanten. J. M. Ebersold, Winterthur

Solution: Let $\boldsymbol{m}$ be a unit vector normal to E, and let $\boldsymbol{v}$ be a unit vector in direction $\boldsymbol{r}$, so $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v} = \sin\varphi$. Let P denote the operator of projection along $\boldsymbol{v}$ onto E. For any $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{x}$, where $(P\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{m} = 0$. Hence $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m} + 0 = \lambda\sin\varphi$, so

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}}{\sin\varphi}\boldsymbol{v}\,,$$

and

$$|P\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 - \frac{2}{\sin\varphi}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m})^2}{\sin^2\varphi}\,,$$

First assume $a = 1$, and let $e_1, \ldots, e_n$ be an orthonormal basis of the euclidean n-space, along the edges from 0 of the hypercube. Then

$$\begin{aligned}\sum |Pe_j|^2 &= \sum |e_j|^2 - \frac{2}{\sin\varphi}\sum (e_j\cdot m)(e_j\cdot v) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\sum (e_j\cdot m)^2\\ &= n - \frac{2}{\sin\varphi} m\cdot v + \frac{1}{\sin^2\varphi}|m|^2\\ &= n - 2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}.\end{aligned}$$

This is the answer for $a = 1$; for general a it is $(n - 2 + 1/\sin^2\varphi)\, a$.

H. Flanders, Tel Aviv, Israel

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), J. Binz (Bern), K. Grün (Linz, Österreich), H. Kappus (Rodersdorf SO) und I. Paasche (München, BRD; zwei Lösungen).

Anmerkung des Aufgabenstellers: Die gesuchte Quadratsumme ist unabhängig von der Lage des Würfels in bezug auf E und r.

Aufgabe 702. Man beweise, dass für die Seitenlängen a, b, c, die Seitenhalbierenden m_a, m_b, m_c und den Inkreisradius r eines Dreiecks gilt:

$$\frac{m_b^2 m_c^2}{bc} + \frac{m_c^2 m_a^2}{ca} + \frac{m_a^2 m_b^2}{ab} \geq \frac{81}{4} r^2,$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Solution: We use the notations and inequalities from the book O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1969. In view of (5.12) and (5.1) we have $s^3 \geq (27/2)^{3/2} R^{3/2} r^{3/2} \geq (27/2)^{3/2} R \sqrt{2}\, r^2 = 81 (\sqrt{3}/2)\, Rr^2$. Hence $F^3 = r^3 s^3 \geq 81 (\sqrt{3}/2)\, Rr^5$, $(r r_a r_b r_c)^2 = F^4 \geq 81 (\sqrt{3}/8)\, 4\, FRr^5 = 81 (\sqrt{3}/8)\, abcr^5$, $(r_a r_b r_c)^2 \geq 81 (\sqrt{3}/8)\, abcr^3$, and by virtue of (8.21) furthermore $(m_a m_b m_c)^2 \geq (r_a r_b r_c)^2 \geq 81 (\sqrt{3}/8)\, abcr^3$. From the inequality for geometric and arithmetic means and the last inequality we obtain $(1/3) \sum m_a^2 m_b^2/ab \geq (m_a m_b m_c)^{4/3}/(abc)^{2/3} \geq (81 \sqrt{3}/8)^{2/3} r^2 = (27/4)\, r^2$, i.e., the assertion of the problem. Since the equality sign in (5.1) ($R \geq 2r$) holds only for equilateral triangles, the same is true for the inequality given in the problem.

A. Makowski, Warsaw, Poland

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), P. Nüesch (Lausanne) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung: F. Leuenberger (Feldmeilen ZH) bemerkt, dass in der Behauptung m_a, m_b, m_c durch die Ankreisradien r_a, r_b, r_c ersetzt werden können. Dies wird aus dem obigen Beweis ersichtlich.

Aufgabe 703. Für alle ganzen Zahlen k, n mit $k > 0$, $n \geq 0$ zeige man

$$\sum_{i_1=0}^{n} \frac{1}{i_1!} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \frac{1}{i_2!} \cdots \sum_{i_k=0}^{n-i_1-\cdots-i_{k-1}} \frac{1}{i_k!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!}$$

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Lösung (mit Verallgemeinerung): Man betrachte die in einer Umgebung des Ursprungs konvergenten Potenzreihen

$$f_\mu(z) = \sum_{i_\mu=0}^{\infty} a_{i_\mu}^{(\mu)} z^{i_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{1}$$

Nach dem Umordnungssatz darf dann in dem Produkt

$$P = \prod_{\mu=1}^{m} f_\mu(z) = \sum_{i_1=0}^{\infty} a_{i_1}^{(1)} z^{i_1} \sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_2}^{(2)} z^{i_2} \ldots \sum_{i_m=0}^{\infty} a_{i_m}^{(m)} z^{i_m} \tag{2}$$

nach Potenzen von z geordnet werden:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} a_{i_1}^{(1)} \ldots a_{i_m}^{(m)} \Bigg) z^n\,. \tag{3}$$

Nun gilt aber offensichtlich für $1 \leq \mu \leq m$, wenn noch $i_j = 0$ gesetzt wird für $j < 1$ oder $j > m$:

$$\sum_{i_\mu+i_{\mu+1}+\cdots+i_m=n-i_1-\cdots-i_{\mu-1}} (.) = \sum_{i_\mu=0}^{n-i_1-\cdots-i_{\mu-1}} \; \sum_{i_{\mu+1}+\cdots+i_m=n-i_1-\cdots-i_\mu} (.)\,. \tag{4}$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses erhält man dann

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=n} a_{i_1}^{(1)} \ldots a_{i_m}^{(m)} = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{n-i_1-\cdots-i_{m-2}} a_{i_1}^{(1)} \ldots a_{i_{m-1}}^{(m-1)} a_{n-i_1-\cdots-i_{m-1}}^{(m)}\,. \tag{5}$$

Anwendungen:

1. Setzt man $m = k+1$, $f_\mu(z) = e^z$ für $\mu = 1, \ldots, k$; $f_{k+1}(z) = 1/(1-z)$, so wird $a_{i_\mu}^{(\mu)} = 1/i_\mu!$ $(\mu = 1, \ldots, k)$, $a_{i_{k+1}}^{(k+1)} = 1$, und die rechte Seite von (5) geht in die linke Seite der zu beweisenden Identität über. Andererseits ist nach (2)

$$P = \frac{e^{kz}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!} z^n$$

(etwa wieder nach (5) mit $m = 2$, $a_{i_1}^{(1)} = k^{i_1}/i_1!$, $a_{i_2}^{(2)} = 1$).
Der Koeffizient von z^n ist gerade die rechte Seite der zu beweisenden Identität. Wegen (3) ist damit alles gezeigt.

2. Setzt man in (5) $a_{i_\mu}^{(\mu)} = 1$ für $\mu = 1, \ldots, m$, also $f_\mu(z) = 1/(1-z)$, so resultiert

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=n} 1 = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{n-i_1-\cdots-i_{m-2}} 1\,.$$

$$\text{Aber } P = \left(\frac{1}{1-z}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} z^n\,.$$

Koeffizientenvergleich gibt die bekannte kombinatorische Formel für die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch m nichtnegative ganzzahlige Summanden.

3. Schliesslich liefert $f_\mu(z) = (1+z)^{n_\mu}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{i_1=0}^{n} \binom{n_1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \binom{n_2}{i_2} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{n-i_1-\cdots-i_{m-2}} \binom{n_{m-1}}{i_{m-1}} \binom{n_m}{n-i_1-\cdots-i_{m-1}} = \binom{n_1+\cdots+n_m}{n}.$$

G. Bach, Braunschweig, BRD

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bern; zwei Lösungen), W. Bühler (Mainz, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Flanders (Tel Aviv, Israel), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO), M. S. Klamkin (Dearborn, Michigan, USA), P. Mihailescu (Zürich), I. Paasche (München, BRD), H.-G. Roos (Stassfurt, DDR; zwei Lösungen) und M. Vowe (Therwil BL).

Anmerkungen der Redaktion: Verschiedene Einsender liefern einen elementaren Induktionsbeweis ohne Rückgriff auf die Theorie der Potenzreihen. Durch multinomiale Entwicklung von k^i erhält M. S. Klamkin die folgende Verallgemeinerung:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!} = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \cdots \sum_{i_r=0}^{n-i_1-\cdots-i_{r-1}} \prod_{s=1}^{r} \frac{k_s^{i_s}}{i_s!},$$

wobei $k_1 + \ldots + k_r = k$ gelte. J. Binz und W. Bühler beweisen die Identität durch Lösung eines Anzahlproblems auf zwei Arten.

Aufgabe 704. $\nu(k)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der natürlichen Zahl k. Man zeige, dass für jedes $\eta > 0$ die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\log k)^{\nu(k)}}{k^{1+\eta}}$$

konvergent ist.

P. Erdös, Budapest

Lösung: Es sei

$$s(x) = \sum_{2 \le k \le x} \frac{(\log k)^{\nu(k)}}{k}.$$

Wir werden zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$s(x) = O(x^\varepsilon) \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

gilt. Partielle Summation, etwa mit $\varepsilon = \eta/2 > 0$, ergibt dann

$$\sum_{2 \le k \le x} \frac{(\log k)^{\nu(k)}}{k^{1+\eta}} = \sum_{k \le x} \frac{s(k) - s(k-1)}{k^\eta}$$

$$\le \sum_{k \le x} s(k) \left(\frac{1}{k^\eta} - \frac{1}{(k+1)^\eta} \right) + \frac{s(x)}{x^\eta} = O\left(\sum_{k \le x} \frac{s(k)}{k^{1+\eta}} \right) + o(1) = O(1).$$

Der Nachweis von (1) reicht daher zur Lösung der Aufgabe aus.

Es sei $x \ge 3$; da die natürliche Zahl k nicht kleiner ist als das Produkt der ersten $r = \nu(k)$ Primzahlen, gilt erst recht $k \ge r! \geqslant (r/e)^r$ und für $k \le x$ weiter $r \le y = e \log x/\log\log x$. Es folgt

$$s(x) = \sum_{1 \le r \le y} \sum_{\substack{k \le x \\ \nu(k) = r}} \frac{(\log k)^r}{k}. \tag{2}$$

Darin fällt die innere Summe mit einer gewissen Konstanten c

$$\leq \frac{(\log x)^r}{r!}\left(\sum_{\substack{p^\alpha \leq x \\ p\ prim,\ \alpha \geq 1}} \frac{1}{p^\alpha}\right)^r \leq \frac{1}{r!}(c \log x \log\log x)^r$$

aus. (Denn bekanntlich gilt sogar $\sum_{\substack{p \leq x \\ p\ prim}} 1/p \sim \log\log x$, und die Doppelreihe $\sum_{p,\ \alpha \geq 2} p^{-\alpha}$ konvergiert.) Einsetzen in (2) liefert

$$s(x) \leq \sum_{1 \leq r \leq y} \frac{1}{r!}(c \log x \log\log x)^r .$$

Indem wir schliesslich die Summe an der Stelle $\log x/(\log\log x)^2$ auftrennen, erweisen sich beide Bestandteile als ein $O(x^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also ist (1) richtig.

L. Lucht, Clausthal, BRD

Eine weitere Lösung sandte P. Mihailescu (Zürich).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. April 1975.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 29, p. 99).

Aufgabe 725. Ein ebenes Dreieck mit den Winkeln $\alpha < \beta < \gamma$ habe die Höhen h_i, den Umkreisradius R und den Inkreisradius r. Es gelte $\gamma/\alpha = (1/r)(h_1 + h_2 + h_3) - (3R/2r + 2r/R) = 5$. Man zeige, dass genau einer der Winkel des Dreiecks mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

F. Leuenberger, Feldmeilen ZH

Aufgabe 726. Es seien n eine natürliche Zahl und $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ die fortlaufend numerierten Eckpunkte eines regulären $(2n + 1)$-Ecks mit Umkreisradius 1. Man zeige, dass für $L_i := \overline{A_1 A_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = \prod_{i=1}^{n} L_i^2 = 2n + 1$.

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 727. Give an elementary proof (no calculus) of

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$$

where n is an integer ≥ 7.

M. S. Klamkin, Ann Arbor, Michigan, USA

Aufgabe 728. Eine assoziative algebraische Struktur $(H, \cdot)$ mit dem neutralen Element e nennen wir ein r-Monoid, falls H mindestens ein Element enthält, welches in H ein rechtsinverses, aber kein linksinverses Element besitzt. Man finde ein r-Monoid H_0 derart, dass jedes r-Monoid ein zu H_0 isomorphes Untermonoid besitzt.

A. Zbinden, Bern