Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 29 (1974)
Heft: 6

Artikel: Über Primteiler von Stirlingschen Zahlen zweiter Art
Autor: Harborth, Heiko
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29905

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 29 Heft 6 Seiten 129–160 10. November 1974

Über Primteiler von Stirlingschen Zahlen zweiter Art

Herrn Professor Dr. H.-J. Kanold in Dankbarkeit zum 60. Geburtstag

Werden $n+1$ Objekte auf $k+1$ gleichberechtigte Schubfächer so verteilt, dass kein Fach leer bleibt, und gibt es $S(n, k)$ verschiedene Möglichkeiten dies zu tun, so nennt man $S(n, k)$ Stirlingsche Zahlen zweiter Art (siehe etwa [1], [4], [5]; man beachte die verschiedenen Arten der Zählung, die in dieser Note in Zeilen und Spalten mit Null beginnen soll). Es gilt

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (k+1)\, S(n-1, k)\,, \tag{1}$$

und mit

$$S(n, 0) = S(n, n) = 1 \quad \text{für} \quad n \geqq 0 \tag{2}$$

sind alle Zahlen $S(n, k)$ rekursiv zu bestimmen. Es widerspricht (1) und (2) nicht, wenn gegebenenfalls zusätzlich die Werte

$$S(n, k) = 0 \quad \text{für} \quad k > n, \quad n \geqq 0, \quad \text{und} \quad k < 0, \quad n \geqq -1\,, \tag{3}$$

definiert werden. Die Zahlen $S(n, k)$ lassen sich entsprechend einem Pascalschen Dreieck so anordnen, dass in der n-ten Zeile an k-ter Stelle $S(n, k)$ zu finden ist ($n, k = 0, 1, \ldots$). Da nur die Teilbarkeit durch eine Primzahl p von Interesse sein soll, genügt es die Reste modulo p, wie in der Figur für $p = 3$, aufzuschreiben.

Werden nun die Stirlingschen Zahlen zweiter Art Zeile für Zeile von links nach rechts fortlaufend von 1 bis N numeriert, und wird dabei mit $A(N)$ die Anzahl der nicht durch p teilbaren Zahlen gezählt, so soll das Verhältnis $A(N)/N$ für $N \to \infty$ betrachtet werden. Es wird der folgende Satz gezeigt, dessen Analogon für Binomialkoeffizienten in [2], und mit beliebigen Teilern in [3] und [6] bewiesen wurde.

Satz: *Jede Primzahl teilt fast alle Stirlingschen Zahlen zweiter Art.*

Dabei soll «fast alle» bedeuten, dass

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A(N)}{N} = 0 \tag{4}$$

gilt, die natürliche Dichte der $N - A(N)$ durch p teilbaren Zahlen $S(n, k)$ also Eins ist.

Zum Beweis wird zunächst die einfache Kongruenz

$$S(n, k) \equiv S(n-p, k-p) + S(n-p+1, k) \pmod{p} \tag{5}$$

für alle ganzen k und $n \geqq p$ nachgewiesen. Ist $n = p - 1$, so gilt mit (2), (3) und mit Korollar (4.2) aus [7]

$$S(p-1, k) \equiv 0, \quad \text{ausser} \quad S(p-1, 0) \equiv S(p-1, p-1) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hieraus folgt mit (1)

$$S(p, k) \equiv 0, \quad \text{ausser} \quad S(p, 0) \equiv S(p, 1) \equiv S(p, p) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mit diesen Resten und mit (2), (3) prüft man die Gültigkeit von (5) für $n = p$ nach. Aus der Annahme, dass (5) für $n = p + m$ bereits bewiesen ist ($m \geqq 0$), und mit (1) ergibt sich

$$\begin{aligned} S(p+m+1, k) &\equiv S(m, k-1-p) + S(m+1, k-1) + (k+1)\{S(m, k-p) \\ &\quad + S(m+1, k)\} \equiv S(m, k-p-1) + (k-p+1)\, S(m, k-p) \\ &\quad + S(m+1, k-1) + (k+1)\, S(m+1, k) \equiv S(m+1, k-p) \\ &\quad + S(m+2, k) \pmod{p}, \end{aligned}$$

und damit (5) durch vollständige Induktion über die Zeilenzahl. Wegen (3) ist (5) auch für $n = p - 1$ und $k = 0$ richtig.

$$\begin{array}{c}
1 \\
\underline{1}\ 1 \\
1\ 0\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{1}\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{2}\ 2\ 0\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ \underline{1}\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \underline{0}\ 0\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \underline{1}\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{2}\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ \underline{1}\ 1\ 0\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ \underline{1}\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \underline{1}\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{1}\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1 \\
\underline{1}\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \underline{0}\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ \underline{2}\ 2\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ \underline{1}\ 1\ 0\ \ldots
\end{array}$$

Die Kongruenz (5) entspricht der Rekursion für die Binomialkoeffizienten. Aus (5) folgt durch vollständige Induktion über v

$$S(v(p-1) + w + i, wp + j) \equiv \binom{v}{w} S(i, j) \pmod{p},$$

$$v \geqq 0, \quad 0 \leqq w \leqq v, \quad \text{für} \quad j \leqq i \leqq p - 2 + j \quad \text{und} \quad 0 \leqq j \leqq p - 1.$$

Hiernach kann das Zahlendreieck der Reste modulo p von $S(n, k)$ in $p(p-1)$ disjunkte Zahlendreiecke aufgeteilt werden, deren Zahlen die jeweils mit $S(i, j)$ multiplizierten Reste modulo p des Pascalschen Dreiecks sind. Die unterstrichenen Reste in der Figur bilden etwa ein solches Teildreieck ($i = 1, j = 0, p = 3$). Ist $S(i, j)$ nicht durch p teilbar, so sind in dem zugehörigen Teildreieck genau diejenigen Zahlen nicht durch p teilbar, deren entsprechende Pascal-Zahlen es nicht sind.

Nun gilt sicher

$$A(N) \leqq p(p-1)\, Z(v)$$

für alle N mit

$$\binom{v\,(p-1)+2}{2} \leqq N < \binom{(v+1)\,(p-1)+2}{2},$$

wenn mit $Z(n)$ die im Pascalschen Dreieck bis einschliesslich der Zeile n nicht durch p teilbaren Binomialkoeffizienten gezählt werden. Weiterhin ist

$$Z(v) \leqq Z(p^r - 1) \quad \text{für alle } v \text{ mit} \quad p^{r-1} - 1 < v \leqq p^r - 1$$

erfüllt, und in [3] und [6] wurde

$$Z(p^r - 1) = \binom{p+1}{2}^r$$

gezeigt. Mit diesen Abschätzungen ergibt sich

$$0 \leqq \frac{A(N)}{N} \leqq \frac{p\,(p-1)\,Z(v)}{\binom{v\,(p-1)+2}{2}} < 2\,p\,\frac{Z(v)}{v^2} \leqq 2p\,\frac{Z(p^r-1)}{p^{2r-2}}$$

$$= 2p^3 \left(\frac{p+1}{2p}\right)^r \leqq 2p^3 \left(\frac{3}{4}\right)^r,$$

und der letzte Ausdruck strebt gegen Null für beliebig grosses r. Hiermit ist die Richtigkeit von (4) und damit der Satz bewiesen.

Für Primzahlpotenzen, und daher dann auch für beliebige Teiler, ist das entsprechende Ergebnis zu erwarten. Man scheint jedoch nicht in gleicher Weise, wie hier für Primteiler, die bekannte Verteilung im Pascalschen Dreieck ausnutzen zu können.

Heiko Harborth, TU Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. COMTET, *Analyse Combinatoire II* (Paris 1970).
[2] N. J. FINE, *Binomial coefficients modulo a prime*, Amer. Math. Monthly *54*, 589–592 (1947).
[3] H. HARBORTH, *Über die Teilbarkeit im Pascal-Dreieck*, Math.-Phys. Semesterberichte (erscheint).
[4] C. JORDAN, *Calculus of Finite Differences* (New York 1965).
[5] J. RIORDAN, *Combinatorial Identities* (New York 1968).
[6] D. SINGMASTER, *Notes on binomial coefficients – III: Any integer divides almost all binomial coefficients*, J. London Math. Soc. (to appear).
[7] H. WEGNER, *Über das Maximum bei Stirlingschen Zahlen zweiter Art*, J. reine u. angew. Math. *262/263*, 134–143 (1973).