Zwei Beispiele zur Zerlegungsgleichheit 4dimensionaler Polytope

Autor(en): **Mürner, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 6

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29906

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zwei Beispiele zur Zerlegungsgleichheit 4dimensionaler Polytope

Wir betrachten eigentliche Polyeder des 4dimensionalen euklidischen Raumes E^4 1). P bezeichne die Menge aller eigentlichen Polyeder im E^4. Zwei Polyeder $A, B \in P$ nennen wir zerlegungsgleich (geschrieben $A \sim B$), wenn sie elementargeometrisch in gleich viele Teilpolyeder $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zerlegt werden können, so dass A_i mit B_i kongruent ist (für $i = 1, 2, \ldots, n$). Sind alle diese Kongruenzen sogar durch Translationen realisierbar, d.h. jedes A_i mit B_i translationsgleich, so heissen A und B translativ zerlegungsgleich ($A \approx B$).

Seit der Untersuchung von Zerlegungsrelationen dienten immer wieder reguläre Polytope als Musterbeispiele für Zerlegungsgleichheiten und Zerlegungsungleichheiten. M. Dehn [2] illustrierte z.B. seine notwendigen Bedingungen für Zerlegungsgleichheit im E^3 mit dem Nachweis, dass ein reguläres Tetraeder vom Inhalt 1 weder mit dem Einheitswürfel noch mit zwei regulären Tetraedern vom Inhalt $^1/_2$ zerlegungsgleich sein kann. Die Frage, ob und wie zwei verschiedene reguläre Polytope des E^3 überhaupt zerlegungsgleich sein können, und gewisse Erweiterungen dieses Problemkreises untersuchte insbesondere H. Lebesgue [8, 9].

Durch die Arbeiten [4] und [5] von H. Hadwiger, [6] von B. Jessen und [7] von B. Jessen und A. Thorup sind (nach der Klärung der entsprechenden Fragen im Dreidimensionalen) die Probleme der gewöhnlichen sowie der translativen Zerlegungsgleichheit von Polyedern des E^4 neuerdings vollständig geklärt worden; man kennt Systeme von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche bei vorgegebenen Polyedern rechnerisch überprüfbar sind.

Die erwähnten Ergebnisse gestatten, die Zerlegungsverhältnisse auch bei den regulären Polytopen des E^4 rechnerisch vollständig abzuklären. Für eine ausführliche Beschreibung der sechs 4-dimensionalen regulären Polytope $Z_5(l)$ (Simplex), $Z_8(l)$ (Masspolytop, Hyperwürfel), $Z_{16}(l)$ (Kreuzpolytop, Hyperoktaeder), $Z_{24}(l)$, $Z_{120}(l)$ und $Z_{600}(l)$ verweisen wir auf das Buch von H. S. M. Coxeter [1] (der Index bezeichnet die Anzahl 3dimensionaler Begrenzungspolytope, l die Länge der 1dimensionalen Kanten).

Nachstehende Tabelle enthält die Zerlegungsrelationen, die sich mit Hilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen von H. Hadwiger und B. Jessen errechnen lassen; dabei bedeutet (—) keine Zerlegungsgleichheit, (z) Zerlegungsgleichheit und (tz) translative Zerlegungsgleichheit:

	Z_5	Z_8	Z_{16}	Z_{24}	Z_{120}	Z_{600}
Z_5		–	–	–	–	–
Z_8	–		z	tz	z	–
Z_{16}	–	z		z	z	–
Z_{24}	–	tz	z		z	–
Z_{120}	–	z	z	z		–
Z_{600}	–	–	–	–	–	

1) Ein eigentliches Polyeder sei definiert als Vereinigungsmenge von endlich vielen abgeschlossenen nichtentarteten Simplexen. Als Polytop bezeichnen wir ein konvexes Polyeder.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, dass sich einige dieser Zerlegungsgleichheiten nicht nur anhand der hinreichenden Bedingungen, sondern direkt durch geometrische Konstruktionen nachweisen lassen. Damit wird die nötige Stückzahl abschätzbar. Wir werden für die Zerlegungsgleichheiten zwischen $Z_8(l)$, $Z_{16}(l')$ und $Z_{24}(l'')$ explizite Realisierungen angeben. Genauer weisen wir Zerlegungsgleichheiten der Form $m \cdot Z_i(l) \approx n \cdot Z_j(l')$ [bzw. $m \cdot Z_i(l) \sim n \cdot Z_j(l')$] nach, wobei $n \cdot A$ ein Polyeder bezeichnet, das aus n zum Polytop A translationsgleichen Stücken besteht. Diese Relationen sind gleichwertig mit den entsprechenden Beziehungen zwischen inhaltsgleichen $Z_i(L)$ und $Z_j(L')$, denn die Gestalt der notwendigen und hinreichenden Bedingungen garantiert in den von der Tabelle erfassten Fällen, dass jede bestehende gewöhnliche oder translative Zerlegungsgleichheit zwischen $Z_i(L)$ und $Z_j(L')$ mit der gewöhnlichen bzw. translativen Zerlegungsgleichheit von einem Aggregat paarweise translationsgleicher disjunkter $Z_i(l)$ mit einem inhaltsgleichen Aggregat paarweise translationsgleicher disjunkter $Z_j(l')$ gleichwertig ist.

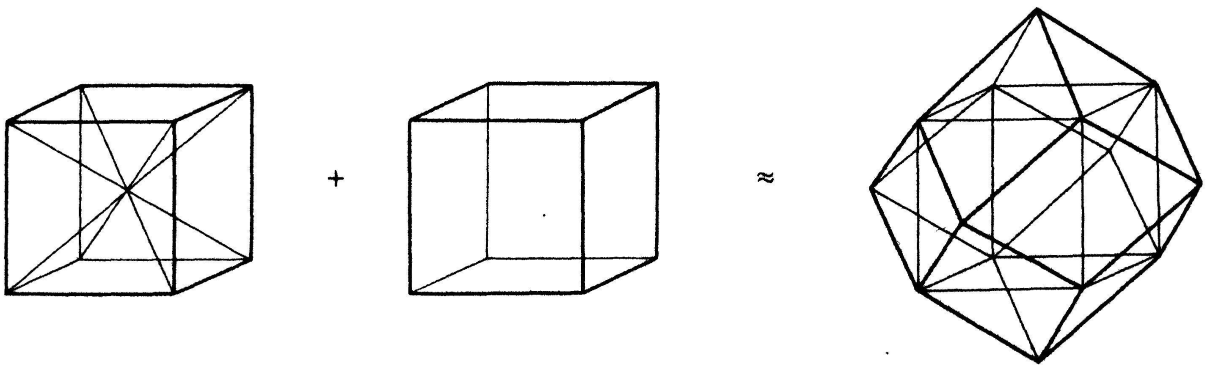
Beispiel 1: Zwei translationsgleiche 8-Zelle (Hyperwürfel) sind mit einem passend liegenden 24-Zell gleicher Kantenlänge durch Zerstückelung in neun Teilpolytope translativ zerlegungsgleich:

$$2 \cdot Z_8(1) \approx Z_{24}(1)$$

Beispiel 2: Zwei translationsgleiche 8-Zelle (Hyperwürfel) der Kantenlänge 1 sind mit drei passend liegenden, paarweise kongruenten (aber nicht translationsgleichen) 16-Zellen (Hyperoktaeder) der Kantenlänge $\sqrt{2}$ durch Zerstückelung in achtzehn Teilstücke translativ zerlegungsgleich:

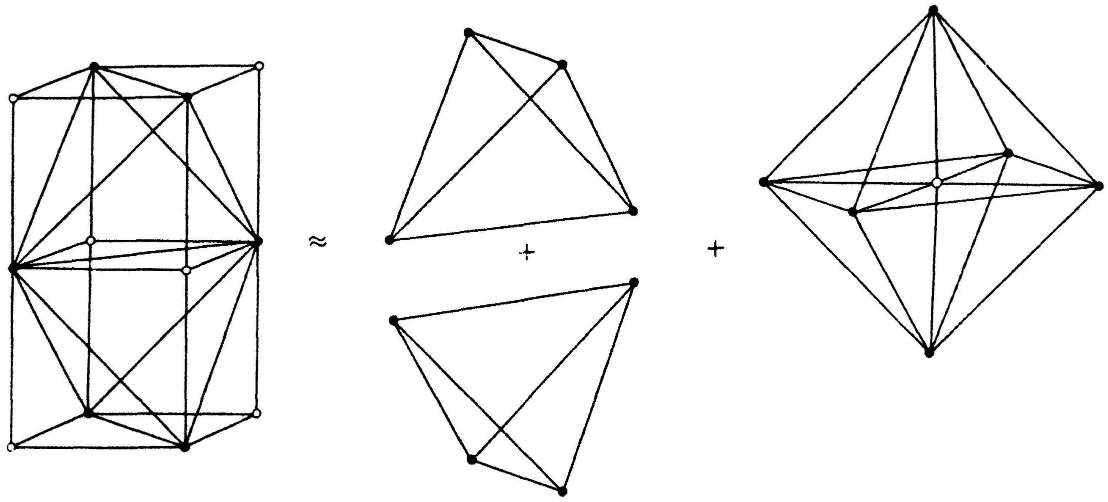
$$2 \cdot Z_8(1) \sim 3 \cdot Z_{16}(\sqrt{2})$$

Nachweis für Beispiel 1: Dem Beweis liegt eine Idee zugrunde, die wir anhand einer Zerlegung des 3dimensionalen Einheitswürfels veranschaulichen wollen: wir zerlegen den Würfel in kongruente, auf den Seitenflächen errichtete Pyramiden, deren gemeinsame Spitze mit dem Würfelmittelpunkt zusammenfällt. Wenn wir nun diese Pyramiden durch passende Translationen den Seitenflächen eines anderen, translationsgleichen Würfels aufsetzen, so entsteht bekanntlich (vgl. Figur 1) ein Rhombendodekaeder. Dies ist zwar kein vollreguläres Polytop; wie bei H. S. M. Coxeter [1], S. 150 nachzulesen ist, führt aber die genau gleiche Konstruktion im E^4 zu einem regulären Polytop, nämlich zum $Z_{24}(1)$.



Figur 1

Nachweis für Beispiel 2: Auch hier wollen wir die Zerlegungsidee zunächst an dem der Anschauung zugänglichen 3dimensionalen Fall darlegen. Wir färben die Ecken eines Würfels mit zwei Farben (● und ○) so, dass die Endpunkte jeder Kante verschiedene Farbe aufweisen (vgl. Figur 2). Die konvexe Hülle der Ecken der einen Farbe bildet ein Tetraeder 0_1; der Rest zerfällt in vier kongruente Pyramiden S_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Zerlegen wir zwei Würfel spiegelbildlich in der beschriebenen Weise, so entstehen neben zwei Tetraedern acht Pyramiden, die sich nach passenden Verschiebungen zu einem Oktaeder zusammensetzen lassen. Im E^3 sind also zwei Würfel mit der Vereinigung von zwei Tetraedern und einem Oktaeder zerlegungsgleich vgl. Figur 2).



Figur 2

Im 4dimensionalen Fall zeigt sich, dass die durch die Zerlegung von zwei Hyperwürfeln in der beschriebenen Weise entstehenden Polytope gerade drei kongruente 16-Zelle sind. Wir zerlegen zuerst einen 4dimensionalen Einheitswürfel in ein Hyperoktaeder 0_1 und acht Simplexe S_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Zu diesem Zweck färben wir die sechzehn Ecken des 8-Zells wie oben beschrieben abwechslungsweise mit zwei Farben und fassen sie ihrer Farbe entsprechend in zwei Mengen $\{A_i\}$ und $\{B_i\}$, $i \in I$, zusammen. Die acht paarweise nicht benachbarten Ecken A_i, $i \in I$, haben als konvexe Hülle ein reguläres 16-Zell 0_1 mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ (vgl. H. S. M. Coxeter [1], S. 156); acht der sechzehn begrenzenden Tetraeder liegen auf dem Rand des Hyperwürfels, die übrigen acht im Innern. Für ein jedes dieser letztgenannten acht Tetraeder S_i', $i \in I$, sind die Ecken genau einer Würfelecke B_i, $i \in I$, benachbart; die von B_i ausgehenden 1dimensionalen Würfelkanten besitzen daher als konvexe Hülle ein (nichtreguläres) Simplex S_i, $i \in I$, mit Basis S_i' und Spitze B_i, in der vier paarweise orthogonale 1dimensionale Kanten zusammenstossen. Auf diese Weise zerfällt der Würfel in ein 16-Zell 0_1 und acht paarweise kongruente Simplexe S_i, $i \in I$.

Nun zerlegen wir zwei Einheitswürfel spiegelbildlich in der beschriebenen Weise. So entstehen zwei kongruente, aber nicht translationsgleiche 16-Zelle 0_1 und 0_2 und sechzehn kongruente Simplexe S_j, $j \in J = \{1, 2, \ldots, 16\}$. Wegen der Orthogonalität zwischen vier 1dimensionalen Kanten jedes Simplexes S_j, $j \in J$, ist es mit Translationen, bei denen die Punkte B_j je in einen vorgegebenen Punkt P des E^4 übergehen, möglich, diese sechzehn Simplexe lückenlos um den Punkt P anzuordnen; das entstehende Polytop ist wiederum ein reguläres 16-Zell mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$, also den beiden anderen kongruent.

Beide Beispiele stehen nach H. Groemer [3] in engem Zusammenhang damit, dass es Parkettierungen des E_4 mit lauter regulären 24-Zellen (alle in gleicher Drehlage) bzw. mit lauter regulären 16-Zellen (in drei verschiedenen Drehlagen) gibt (vgl. H. S. M. Coxeter [1], S. 296). Da solche Parkettierungen mit regulären 120-Zellen nicht existieren, ist es vermutlich schwierig, die Zerlegungsgleichheit des 120-Zells mit einem Hyperwürfel explizit zu realisieren.

P. Mürner, Gymnasium Interlaken

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, (Methuen, London 1948).
[2] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. *55*, 465–478 (1901).
[3] H. GROEMER, *Über Würfel- und Raumzerlegungen*, El. Math. *19*, 25–27 (1964).
[4] H. HADWIGER, *Translationsinvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale*, Arch. Math. *3*, 387–394 (1952).
[5] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer-Verlag 1957.
[6] B. JESSEN, *Zur Algebra der Polytope*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II 1972, 47–53.
[7] B. JESSEN, und A. THORUP, *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces* (1973, noch unpubliziert).
[8] H. LEBESGUE, *Sur les subdivisions des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers*, Publ. math. Univ. Belgrade *6-7*, 183–188 (1938).
[9] H. LEBESGUE, *Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers*, Ann. Soc. Polon. Math. *17*, 193–226 (1939).

A Triangle Transformation

1. The configuration of a triangle on the sides of which polygons of a certain kind are described is a much studied theme in elementary geometry. The following variant does not seem to be well-known.

On the sides of a given triangle ABC similar isosceles triangles BCA, CAB, ABC, are constructed (Fig. 1), with bases BC, CA, AB, all outward or all inward, the base angle φ being taken positive or negative respectively ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$). The operation thus defined which transforms the triangle $\Delta = ABC$ into $\Delta_1 = A_1B_1C_1$ will be denoted by $T(\varphi)$.

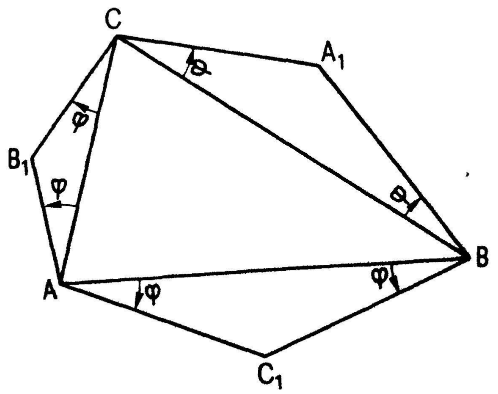


Fig. 1