Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1975)
Heft: 2

Artikel: Translative Parkettierungspolyeder und Zerlegungsgleichheit
Autor: Mürner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30643

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 30 Heft 2 Seiten 25–48 10. März 1975

Translative Parkettierungspolyeder und Zerlegungsgleichheit

Mit E^n bezeichnen wird den n-dimensionalen Euklidischen Raum. Ein eigentliches, kompaktes Polyeder A des E^n heisst mit einem Würfel W zerlegungsgleich, wenn es sich elementargeometrisch in endlich viele Teilpolyeder zerlegen lässt, die mittels eigentlicher Bewegungen zum Würfel W zusammengesetzt werden können. Werden für das Zusammensetzen nur Translationen benötigt, so heisst das Polyeder A mit dem Würfel W translativ zerlegungsgleich, geschrieben $A \sim W$. Ein Polyeder P heisst Parkettierungspolyeder des E^n, wenn es möglich ist, den ganzen Raum lückenlos und ohne Überlappung mit abzählbar unendlich vielen mit P kongruenten Polyedern P_λ auszufüllen. Sind die Polyeder P_λ, welche die Parkettierung realisieren, nicht nur kongruent, sondern sogar translationsgleich, so heisst die Parkettierung translativ.

H. Hadwiger hat nun in [4] die Frage gestellt, ob jedes Parkettierungspolyeder mit einem Würfel zerlegungsgleich sei. H. Groemer [1] konnte diese Frage unter der Voraussetzung bejahend beantworten, dass die Parkettierung einer gewissen Regularitätsbedingung genügt. H. Hadwiger [3] wies nach, dass jedes konvexe Polyeder, das eine translative Parkettierung des E^3 ermöglicht, mit einem Würfel translativ zerlegungsgleich ist.

Nachdem B. Jessen und A. Thorup [6] kürzlich zeigen konnten, dass die von H. Hadwiger [2] formulierten notwendigen Bedingungen für translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder im E^n auch hinreichend sind, liegt es nahe, das Problem der translativen Parkettierung auch für Dimensionen $n > 3$ zu bearbeiten. Es zeigt sich, dass folgender Satz gilt:

Satz: *Jedes eigentliche, kompakte Polyeder P, das eine translative Parkettierung des E^n gestattet, ist mit einem Würfel W translativ zerlegungsgleich, d.h. es gilt $P \sim W$.*

Der Beweis basiert auf dem Kriterium für translative Zerlegungsgleichheit, das wir in diesem Zusammenhang nur kurz charakterisieren wollen (für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf [2] und [6]).

Zwei inhaltsgleiche eigentliche Polyeder A und B des Euklidischen Raumes E^n sind genau dann translativ zerlegungsgleich, wenn sie in den Werten gewisser Funktionale φ_k, $k \in I = \{1, \ldots, n-1\}$ übereinstimmen. Die $(n-1)$ Polyederfunktionale φ_k sind translationsinvariant und additiv und messen im Prinzip die Inhalte paralleler Randflächen und Kanten aller Dimensionen der Polyeder A und B. Für unsere Be-

dürfnisse ist die Tatsache wichtig, dass für einen Würfel alle Funktionale verschwinden. Im nachstehenden Beweis nehmen wir eine Idee auf, die H. Hadwiger in [3] für den Fall $n = 3$ verwendet hat.

Beweis: $\{P_\lambda\}$ sei eine translative Parkettierung des E^n, wobei alle Polyeder P_λ mit dem Polyeder P translationsgleich seien, geschrieben $P_\lambda \cong P$. W bezeichne den n-dimensionalen Einheitswürfel und $\overline{W} = sW$, wo $s \gg 1$ eine grosse positive reelle Zahl sei. Es gilt somit

$$\text{(a)}\ \overline{W} = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} (\overline{W} \cap P_\lambda),$$

wobei wegen der Beschränktheit und Eigentlichkeit von P nur endlich viele Durchschnittspolyeder nichtleer sind.

Mit $p = p(s)$ bezeichnen wir die Anzahl der P_λ, die ganz in $\overline{W}$ liegen, so dass $\overline{W} \cap P_\lambda = P_\lambda$ gilt und mit $q = q(s)$ die Anzahl der P_λ, die von $\overline{W}$ angeschnitten werden, so dass $\overline{W} \cap P_\lambda \subset P_\lambda$ und $\overline{W} \cap P_\lambda \neq P_\lambda$ ist. Die Durchschnittspolyeder der ersten Art bezeichnen wir neu mit A_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ und diejenigen der zweiten Art mit B_μ $(\mu = 1, \ldots, q)$, so dass wir $\overline{W}$ schreiben können als

$$\text{(b)}\ \overline{W} = \left(\bigcup_{\nu=1}^{p} A_\nu\right) \cup \left(\bigcup_{\mu=1}^{q} B_\mu\right) \quad \text{mit} \quad A_\nu \cong P.$$

Wegen der Additivität und Translationsinvarianz der Funktionale φ schliesst man aus (b) die $(n-1)$ Gleichheiten

$$\text{(c)}\ \varphi_k(\overline{W}) = 0 = p \cdot \varphi_k(P) + \sum_{\mu=1}^{q} \varphi_k(B_\mu) \quad \text{für alle} \quad k \in I.$$

Da die Inhalte der Randflächen und Kanten aller Dimensionen der Durchschnittspolyeder B_μ gleichmässig beschränkt sind und zudem die Anzahl der Richtungen, die bei der Berechnung der Funktionale $\varphi_k(B_\mu)$ ins Spiel treten, beschränkt ist, gelten für eine geeignete, nur von P abhängige Konstante c die Abschätzungen

$$\text{(d)}\ |\varphi_k(B_\mu)| < c \quad \text{für alle} \quad \mu = 1, \ldots, q \quad \text{und} \quad k \in I.$$

Aus (c) und (d) folgert man

$$\text{(e)}\ |\varphi_k(P)| < \frac{q}{p} \cdot c \quad \text{für alle} \quad k \in I.$$

Wenn v das n-dimensionale Volumen von P ist, schliesst man mit Rücksicht auf die Bedeutung von p und q auf $pv = s^n + o(s^n)$ und $qv = o(s^n)$ und damit auf die für $s \to \infty$ gültige asymptotische Beziehung

$$\text{(f)}\ \frac{q}{p} = \frac{o(s^n)}{s^n} \to 0.$$

Aus (e) und (f) folgt nun sofort, dass $\varphi_k(P) = 0$ ist für alle $k \in I$. Das ist aber gemäss dem erwähnten Zerlegungskriterium gleichbedeutend damit, dass das Parkettierungspolyeder P mit einem inhaltsgleichen Würfel translativ zerlegungsgleich ist.

P. Mürner, Gymnasium Interlaken

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. Groemer, *Über Würfel- und Raumzerlegungen*, El. Math. *19*, 25–27 (1964).
[2] H. Hadwiger, *Translationsvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale*, Arch. Math. *3*, 387–394 (1952).
[3] H. Hadwiger, *Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit*, Math. Nachr. *8* 53–58 (1952).
[4] H. Hadwiger, *Ungelöstes Problem Nr. 45*, El. Math. *18*, 29–31 (1963).
[5] H. Hadwiger, *Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder des gewöhnlichen Raumes*, J. reine angew. Math. *233*, 200–212 (1968).
[6] B. Jessen und A. Thorup, *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces*, (1973, noch nicht publiziert).

Inner Illumination of Convex Polytopes

1. *Introduction.* An n-polytope P is said to be illuminated by its vertices, if for every vertex x of P there is another vertex y of P such that the line segment joining x and y meets the interior of P. Hadwiger in [1], introduced the notion of polytopes illuminated by their vertices and asked whether such polytopes must have at least $2\,n$ vertices. Recently, Mani [2], proved that for $n \leq 7$ the answer to Hadwiger's problem is affirmative, while for higher dimensions he showed that there are n-polytopes P, that are illuminated by their vertices having about $n + 2\sqrt{n}$ vertices. Mani obtained the exact lower bound $k(n)$ for the number of vertices in an n-polytope P which is illuminated by its vertices. Mani's proof is based on the notion of a set of vertices lying opposite a given vertex of P. The proof proceeds by showing that if for some vertex x of the n-polytope P there is more than one vertex lying opposite x then $f^0(P) \geq k(n)$, while if for every vertex x of P there is at most one vertex lying opposite x then $f^0(P) \geq 2\,n$. For the second part of the proof, results and tools from algebraic topology as well as some combinatorial lemmas (Propositions 4 and 5) were used. In this note, we present an alternative proof to this part that avoids using the lemmas and the algebraic topology.

The notation used in this note will be the same as Mani's; we will only repeat those definitions and notation that are used in our proof.

We denote by $\Delta^0 P$ the set of vertices of the polytope P and by $f^0(P)$ their number.

A set $V \subset \Delta^0 P$ illuminates itself if for every v in V there is another vertex v' in V that illuminates v in P.

A set $Y \subset \Delta^0 P$ lies opposite the vertex x, if x illuminates every vertex y in Y and $\Delta^0 P \sim (\{x\} \cup Y)$ illuminates itself.

We set $\gamma(x, P) = \max\{\text{card } Y : Y \text{ lies opposite } x \text{ in } P\}$.

2. *Proof of the Theorem.*

Theorem: If $P \subset E^n$ is illuminated by its vertices, then either $\gamma(x, P) \geq 2$ for some vertex x of P or $f^0(P) \geq 2\,n$.