Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 2

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Kleine Mitteilungen

Von nicht konvexen Polygonen

Bei der Lösung des isoperimetrischen Problems für einfache Polygone mit gegebenen Seiten kann man sich auf konvexe Polygone beschränken: Jedes nicht konvexe Polygon hat eine Stützgerade durch nicht aufeinanderfolgende Ecken; wird der einspringende Teil des Polygons an dieser Stützgeraden reflektiert, entsteht ein Polygon mit grösserer Fläche.

Es ist eine natürliche Frage[1]), ob sich jedes nicht konvexe Polygon mittels einer endlichen Anzahl solcher Reflexionen in ein konvexes Polygon überführen lässt. Die Vermutung liegt nahe, dass es eine Funktion f so gibt, dass jedes Polygon mit n Seiten dazu höchstens $f(n)$ Reflexionen braucht. Während die Frage mit ja zu beantworten ist[2]), ist es das Ziel der vorliegenden Note, die Vermutung zu widerlegen.

In der Tat gibt es schon Vierecke, die erst nach beliebig vielen Reflexionen konvex werden. Genauer: Zu jeder natürlichen Zahl k kann ein nicht konvexes Viereck $ABCD$ angegeben werden, das mehr als k Reflexionen braucht zur Überführung in ein konvexes Viereck.

Dazu wählen wir etwa die Gegenseiten AD und BC beide von der Länge a, die Länge der Seite AB $2a - \Delta$, und CD habe die Länge $d > \Delta$, wobei

$$a > (k+2)^2 \frac{d^2}{\Delta} + \frac{\Delta}{4}, \qquad (*)$$

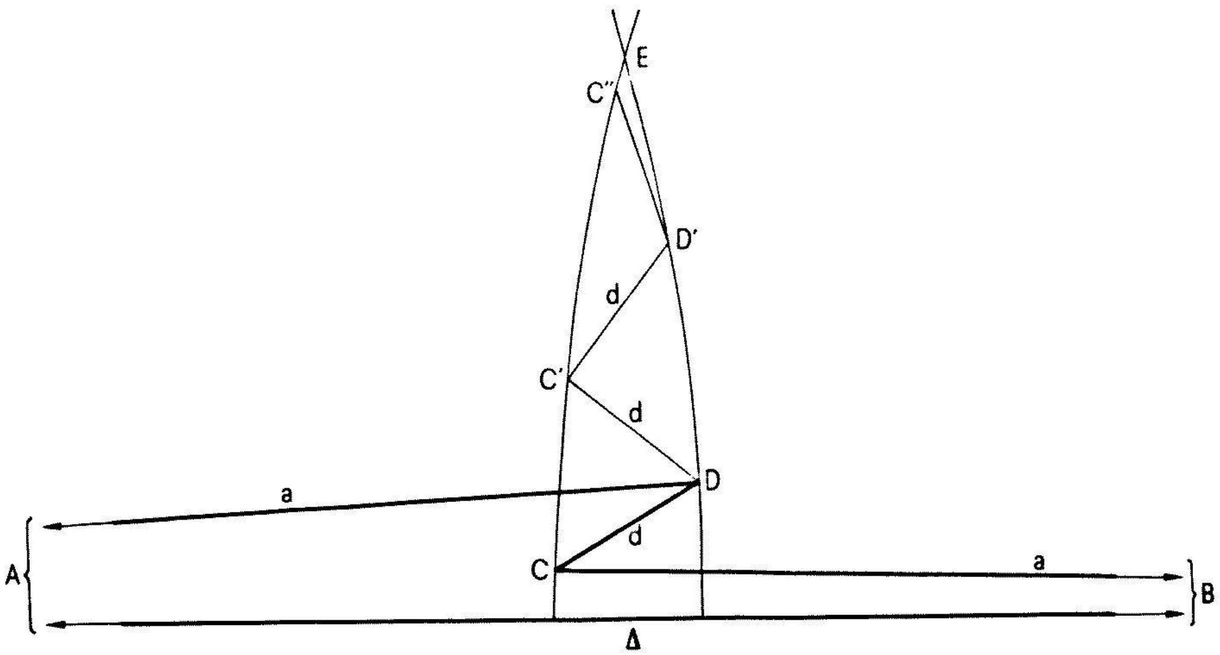


Fig. 1

1) N. D. Kazarinoff, Geometric Inequalities, Random House 1961, p. 57.

2) P. Erdös hat die Frage als Problem 3763 im American Mathematical Monthly gestellt, und eine Lösung von B. de Sz. Nagy erschien dort im März 1939 (Vol. *46*, p. 176).

und die einspringende Ecke C befinde sich um weniger als d von der Seite AB entfernt.

Bei der ersten Reflexion von BCD an der Stützgeraden BD geht C in C' über, bei der zweiten Reflexion an AC' D in D' usw. C, C', C'' ... liegen auf einem Kreisbogen mit Radius a um B; D, D', D'' ... auf einem Kreisbogen mit Radius a um A. (S. Figur). Die beiden Bogen schneiden sich in einem Punkt E, der wegen (*) mehr als $(k+2)\,d$ von AB entfernt liegt, so dass nach k Reflexionen noch keine der Folgen $C, C', C'', \ldots$ und $D, D', D'', \ldots$ den Punkt E überschritten hat, das Viereck also noch nicht konvex geworden sein kann.

J. Schaer, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada

Über idempotente Polynomfunktionen auf Verbänden

Eine Menge A zusammen mit einer Menge Ω von Operationen definiert auf A heisst Algebra. Beispiele einer Algebra sind Gruppe, Ring und Verband. Auf einer Algebra A bilden die Funktionen von A in sich selbst bezüglich der Komposition (bezeichnet durch «$\circ$») eine Halbgruppe. Sind $f\colon A \to A$, $g\colon A \to A$ zwei Funktionen, so ist definiert $f \circ g(x) = f(g(x))$. Man untersucht häufig Unterhalbgruppen der Halbgruppe der Funktionen von A wie die Automorphismen, die Endomorphismen oder die Polynomfunktionen von A.

Ist $p(x)$ ein Polynom auf einer Algebra A, so wird durch $p\colon A \to A$; $a \to p(a)$ für alle Elemente von A eine Funktion definiert, die man Polynomfunktion nennt. Man unterscheidet zwischen Polynom und Polynomfunktion, weil zwei verschiedene Polynome auf einer Algebra durchaus dieselbe Polynomfunktion definieren können. Als Beispiel sei angeführt, dass die zwei verschiedenen Polynome $p(x) = x^3 - x$ und $q(x) = 0$ auf dem Ring $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ dieselbe Polynomfunktion, die alle Elemente von Z_3 auf das Element 0 abbildet, definieren ([2] S. 334).

Wegen des Polynoms $p(x) = x$ ist die identische Funktion stets eine Polynomfunktion. Besitzt die Algebra A mehr als ein Element (was immer vorausgesetzt sei), dann gibt es zu einer konstanten Polynomfunktion definiert durch $p(x) = c$, $c \in A$ keine Umkehrfunktion. Während also die Automorphismen einer Algebra stets eine Gruppe bilden, ist dies bei den Polynomfunktionen nicht der Fall.

Es sei nun als Algebra ein Verband V vorgegeben; für die Operation Durchschnitt wird das Symbol «$\wedge$» und für die Operation Vereinigung wird das Symbol «$\vee$» verwendet. Jedes Polynom $p(x)$ lässt sich als Wort in den Symbolen $a, b, c, d, \ldots$ für die Elemente von V, x für die Unbestimmte und $\wedge$, $\vee$ für die Operationen schreiben. Ein Beispiel sei: $p(x) = (a \vee x) \wedge (b \vee x)$. Die Anzahl der vorkommenden Symbole heisse Länge l des Wortes (bei unserem Beispiel $l = 7$). Es ist offensichtlich, dass ein Polynom mit einer Wortlänge $l > 1$ sich zerlegen lässt in zwei Polynome von einer echt kleineren Wortlänge als l: Entweder ist $p(x) = p_1(x) \vee p_2(x)$ oder $p(x) = p_1(x) \wedge p_2(x)$.

Satz: Die Halbgruppe der Polynomfunktionen auf einem Verband V ist genau dann idempotent, wenn V distributiv ist.

Beweis: Sei V distributiv. Wir zeigen zunächst durch Induktion, dass jedes Polynom $p(x)$ einer der folgenden Wortdarstellungen hat ([4] S. 242): $x, a, x \vee a, x \wedge b$, $(x \vee c) \wedge d$. Hat $p(x)$ die Wortlänge l, so ist entweder $p(x) = x$ die Identität oder $p(x) = a$ eine konstante Polynomfunktion. Wir machen nun die Induktionsannahme, dass bei einer festgewählten natürlichen Zahl $n > l$ alle Polynome der Länge $l < n$ in den oben angeführten Formen geschrieben werden können. Sei nun $p(x)$ ein Polynom mit der Länge n. Wir nehmen an, dass $p(x) = p_1(x) \vee p_2(x)$ ist, wobei die Wortlängen von $p_1(x)$ und $p_2(x)$ echt kleiner als n sind. (Der Fall $p(x) = p_1(x) \wedge p_2(x)$ lässt sich analog zeigen.)

Nach der Induktionsannahme hat nun $p_1(x)$ wie auch $p_2(x)$ eine der oben angeführten Wortdarstellungen:

$p_1(x) = x$	$p_2(x) = x$	$p(x) = x \vee x = x$
$p_1(x) = x$	$p_2(x) = x \vee a$	$p(x) = x \vee (x \vee a) = x \vee a$
$p_1(x) = x$	$p_2(x) = x \wedge b$	$p(x) = x \vee (x \wedge b) = x$
.	.	(Absorptionsgesetz)
.	.	.
.	.	.
$p_1(x) = x \wedge a$	$p_2(x) = x \wedge b$	$p(x) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \vee (a \wedge b)$
.	.	$= x \wedge c \quad$ für $\quad c = a \wedge b$
.	.	(Distributivitätsgesetz)
.	.	.
.	.	.

Mit Hilfe der Gesetze, die in einem distributiven Verband V gelten, lassen sich nun alle Fälle so berechnen, dass stets ein Ausdruck der oben genannten Form entsteht.

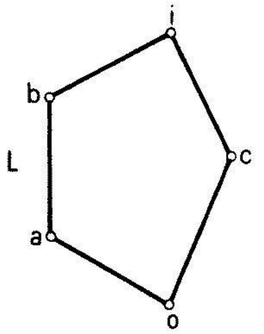
Wir zeigen nun, dass stets $p(p(x)) = p(x)$ ist, das heisst also, dass die Polynomfunktionen idempotent sein müssen:

$$
\begin{aligned}
&p(x) = x && p(p(x)) = x = p(x)\\
&p(x) = a && p(p(x)) = a = p(x)\\
&p(x) = x \vee a && p(p(x)) = (x \vee a) \vee a = x \vee a = p(x)\\
&p(x) = x \wedge b && p(p(x)) = (x \wedge b) \wedge b = x \wedge b = p(x)\\
&p(x) = (x \vee c) \wedge d && p(p(x)) = \big(((x \vee c) \wedge d) \vee c\big) \wedge d =\\
& && = \big((x \vee c) \vee c\big) \wedge (d \vee c) \wedge d = (x \vee c) \wedge d = p(x)
\end{aligned}
$$

(Distributivitäts- und Absorptionsgesetz)

Sei V nicht distributiv. Wir wenden nun den folgenden bekannten Satz aus der Verbandstheorie an ([2] S. 46 Satz 9.3): Ein Verband ist genau dann distributiv, wenn V einen Teilverband besitzt, der isomorph ist zu einem der Verbände L und K, deren Hassediagramme hier aufgeführt sind.

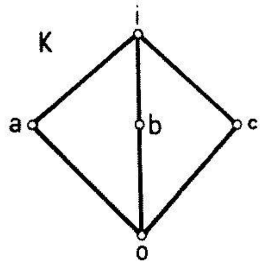
Fall I: V besitzt einen Teilverband L', der zu dem Verband L isomorph ist. Wir schränken nicht die Allgemeinheit des Beweises ein, wenn wir die Elemente von L' so bezeichnen wie die Elemente von L. Dann ist zweifellos $p(x) = ((c \vee x) \wedge b) \vee a$ ein Polynom des Verbandes V. Es gilt nun:



$$p(o) = ((c \vee o) \wedge b) \vee a = a$$
$$p(a) = ((c \vee a) \wedge b) \vee a = b$$
$$p(p(o)) = p(a) = b \neq p(o);\ \text{d.h. } p$$

ist keine idempotente Polynomfunktion.

Fall II: V besitzt einen Teilverband K', der zu K isomorph ist. Wie oben bezeichnen wir die Elemente von K' ebenso wie die von K. Dann ist $p(x) = ((a \vee x) \wedge b) \vee c$ ein Polynom von V.



$$p(o) = ((a \vee o) \wedge b) \vee c = c$$
$$p(c) = ((a \vee c) \wedge b) \vee c = i$$
$$p(p(o)) \neq p(o)\ \text{d.h. } p$$

ist keine idempotente Polynomfunktion von V.

D. Schweigert, Universität Trier–Kaiserslautern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Birkhoff-Bartee, *Modern Applied Algebra*, New York 1970.

[2] Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

[3] Lausch-Nöbauer, *Algebra of Polynomials*, Amsterdam 1973.

[4] Mitsch, H., *Über Polynome und Polynomfunktionen auf Verbänden*, Mh. Math. *74*, 239–243 (1970).

Elementarmathematik und Didaktik

Zur Teilbarkeit in Ringen

1. Algebraische Strukturen durchdringen mit Recht zunehmend den Mathematikunterricht des Gymnasiums [4], beginnen auch schon den der anderen weiterführenden Schulen zu beeinflussen und machen auch vor der Grundschule nicht halt, wie ein Blick in moderne Lehrbücher der verschiedenen Schultypen zeigt. Dasselbe lässt sich bei der Zahlentheorie nicht einmal fürs Gymnasium feststellen (vgl. dazu [2], Seite 252 und [4], wo Zahlentheorie wenigstens unter die wahlfreien Gebiete aufgenommen worden ist), was wohl mit der – wegen des gewohnten Umgangs mit den