

Über einige einfache Folgen und Reihen im Schulunterricht

Autor(en): **Prachar, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-30646>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

da die Determinante des 1. Systems $N(\beta) = 5$ ist und (7) nach Multiplikation mit $N(\beta)$ lautet:

$$(3 + 4i) \cdot 5 = (2k_1 + k_2) \cdot 5 + 5r_1 + (2k_2 - k_1) \cdot 5 + 5r_2 \cdot i.$$

Die Hilfssysteme haben wegen $k_i^{**} = N(\beta) \cdot k_i^*$ die Lösungen

$$k_1^{**} = 5k_1^* = 2, \quad k_2^{**} = 5k_2^* = 11.$$

Auf beiden Wegen erhält man wegen der Äquivalenz der Bedingungen $|k_i - k_i^*| \leq 1/2$, $k_i \in \mathbf{Z}$, und (6): $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Aus (7) folgt nun $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, so dass abschliessend gilt:

$$N(\beta) = 5 > N(\varrho) = 1.$$

Überblickt man zusammenfassend die Beweismittel, so sind es über die Voraussetzungen bezüglich des Integritätsbereichs \mathbf{G} hinaus nur die Bedingung für nicht leere Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems im Falle $m = n = 2$ und die Kenntnis der Lösungsterme sowie etwas elementare Zahlentheorie in \mathbf{Z} .

Hermann Hering, Frechen (Bundesrepublik)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. H. HARDY und E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford 1960.
- [2] H. LENNÉ, *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart 1969.
- [3] H. LUGOWSKI und H.-J. WEINERT, *Grundzüge der Algebra*, Bd. II. Leipzig 1958.
- [4] Nürnberger Lehrpläne des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. MNU Bd. 18, Heft 1/2, S. 1–8, 1965.
- [5] H. J. REIFFEN, G. SCHEJA und U. VETTER, *Algebra*. Mannheim 1969.
- [6] B. L. V. D. WAERDEN, *Algebra*, Bd. 1. Berlin 1960.

Über einige einfache Folgen und Reihen im Schulunterricht

Es sollen hier einige Folgen und Reihen mit einfachen Mitteln behandelt werden, die vielleicht nicht allgemein bekannt sind.

Ein einfacher Beweis für die Monotonie der Folgen mit dem allgemeinen Glied

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bzw. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ benützt nur die Formel¹⁾

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}). \quad (1)$$

Man hat

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

¹⁾ Herr Professor HLAWKA machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, dass dieser Beweis von YZEREN (1970) stammt, der in derselben Weise auch $(1 + z/n)^n$ für komplexes z untersuchte.

Nach (1) mit $a = 1 + 1/(n-1)$, $b = 1 + 1/n$ folgt weiter

$$\frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} - \left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \right\},$$

und dieser Ausdruck ist offenbar grösser als

$$\frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 0,$$

(denn jeder der n Summanden in der geschlungenen Klammer ist $\leq \{1 + 1/(n-1)\}^{n-1}$), was zu beweisen war. In ähnlicher Weise folgt

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \right\} \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

und dies ist grösser als

$$n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n(n^2-1)} > 0.$$

Ein gewisses Hindernis bei der Behandlung von Folgen wie der mit den Gliedern $a_n = \sqrt[n]{n}$ oder $a_n = n^k a^n$ ist es in der Schule, dass diese Folgen üblicherweise mittels des binomischen Lehrsatzes untersucht werden, der erst am Ende der Schulzeit zur Verfügung steht und bei Einführung des Grenzwertbegriffes noch nicht bekannt ist. Wir geben daher eine Behandlung dieser Folgen, ohne den binomischen Lehrsatz zu benutzen. Man hat nach (1) ($b = 1$)

$$1 + \sqrt[n]{n} + (\sqrt[n]{n})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n})^{n-1} = \frac{n-1}{\sqrt[n]{n}-1}. \quad (2)$$

Die linke Seite ist nun für gerades n grösser als

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}} + (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}+1} + \cdots + (\sqrt[n]{n})^{n-1} \geq (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}}$$

und damit folgt

$$\sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{n-1}{\frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

jedenfalls, wenn n durch gerade Zahlen gegen Unendlich strebt. Für ungerades n kann man entweder benützen, dass $\sqrt[n]{n}$ für $n \geq 3$ monoton abnehmend ist oder, dass die linke Seite von (2) für $n = 2m + 1$

$$> (\sqrt[n]{n})^{m+1} \cdot m > (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} (n-1)$$

ist, was dann

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{n-1}{\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} (n-1)} = \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ ergibt.

Ist einmal bekannt, dass $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, so hat man für positives $a < 1$ und etwa $k \geq 0$, $a < b < 1$,

$$n^k a^n = \{(\sqrt[n]{n})^k a\}^n < b^n,$$

für genügend grosses n , weil ja $(\sqrt[n]{n})^k a \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) gelten muss. Somit folgt $n^k a^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ bei festem $a < 1$ ($a > 0$) und festem k . Aus $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ folgt weiter, indem man logarithmiert,

$$\frac{1}{n} \log n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Damit ergibt sich für $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = \left(\frac{\log n}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log (n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

nach (3), wenn man dort n durch $n^{\frac{\beta}{\alpha}}$ ersetzt; wenn z. B. $g_n - 1 < n^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq g_n$ mit ganzem g_n gilt, so hat man ja $g_n \rightarrow \infty$ und

$$\frac{\log (n)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}} \leq \frac{\log g_n}{g_n - 1} = \frac{\log g_n}{g_n} \cdot \frac{g_n}{g_n - 1}$$

und $g_n/(g_n - 1) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

Bei der Besprechung der unendlichen Reihen ist es notwendig, durch ein einfaches Beispiel zu belegen, dass mit $a_n > 0$ $\sum a_n$ divergent sein kann, auch wenn a_n für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Abgesehen von der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ und den noch einfacheren Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[n]{n}$$

man hat ja

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

und

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

kann man die noch einfachere Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

verwenden, wo $\frac{1}{4}$ viermal vorkommt und allgemein $\frac{1}{n}$ n -mal vorkommt. Man erhält aus dieser sofort auch die einfache bedingt konvergente Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots,$$

wobei wieder $\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ genau n -mal angeschrieben werden soll. Dass eine bedingt konvergente Reihe bei einer Umordnung mit einer anderen Summe konvergent werden kann, bereitet dem Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis, weil Beispiele dazu oft etwas kompliziert sind. Das folgende Beispiel scheint mir recht einfach zu sein. Offenbar hat die Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \cdots$$

die Summe Null. Ordnen wir sie ein wenig anders, so entsteht die Reihe

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \cdots$$

wo $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$ viermal angeschrieben werden soll und dann $\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}$ achtmal usw. Diese Reihe hat offensichtlich die Summe (-1) , also eine Summe $\neq 0$. Natürlich ist es leicht, auch eine divergente Reihe zu erhalten:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

K. Prachar, Wien

Simultanbeweis des Fermatschen und Wilsonschen Satzes

Der Fermatsche Satz $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ und die Wilsonsche Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ gestatten einen einfachen gemeinsamen Beweis, der ihren inneren Zusammenhang durch eine interessante Identität (1) erkennen lässt.