

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sei  $p$  eine Primzahl,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  eine beliebige ganze Zahl und  $a_i = a/i$ ;  $1 \leq i \leq p-1$ . Dann gilt

$$a_1 (a_1 - a_2) (a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{p-1}) \\ = \frac{a}{1} \frac{a(2-1)}{2} \frac{a(3-1)}{3} \dots \frac{a(p-2)}{p-1} = \frac{a^{p-1}}{p-1}$$

oder

$$[a_1 (a_1 - a_2) (a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{p-1})] (p-1) = a^{p-1}. \quad (1)$$

Die  $p-1$  Faktoren in der eckigen Klammer sind mod  $p$  ganz und offensichtlich nicht durch  $p$  teilbar. Sie sind paarweise inkongruent, denn aus  $a_1 \equiv a_1 - a_x$  würde sich  $a_x \equiv 0$  und daraus  $a \equiv 0$  ergeben, und aus  $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y$  würde  $a_x \equiv a_y$  und daraus  $x \equiv y$  folgen. Das Produkt von  $p-1$  paarweise inkongruenten Faktoren, die nicht durch  $p$  teilbar sind, ist  $\equiv (p-1)!$ . Nach (1) gilt somit

$$-(p-1)! \equiv a^{p-1} \pmod{p}. \quad (2)$$

Die Kongruenz (2) gilt entsprechend unserer Voraussetzung für jede beliebige ganze Zahl  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Wegen  $1 \equiv 1^{p-1}$  folgt daher aus (2)

$$1 \equiv 1^{p-1} \equiv -(p-1)! \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$$

Damit sind beide Titelsätze simultan bewiesen.

F. Stöwener, Mannheim

## Aufgaben

**Aufgabe 713.** Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h, n) = 1}} \exp\left(\frac{2\pi i h m}{n}\right),$$

using only the formula

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

*Lösung:* Wir gehen von der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^d \exp\left(2\pi i k \frac{m}{d}\right) = \begin{cases} d & \text{falls } d | m \\ 0 & \text{falls } d \nmid m \end{cases}$$

aus, die wir bei der letzten untenstehenden Gleichheit verwenden; bei der zweiten Gleichheit benutzen wir  $\sum_{j|s} \mu(j) = \delta_{1,s}$  (Kronecker- $\delta$ -Symbol), und alle anderen Umformungen sind trivial:

$$\begin{aligned} c(m, n) &= \sum_{\substack{h=1 \\ (h, n)=1}}^n \exp\left(2\pi i \frac{hm}{n}\right) = \sum_{h=1}^n \exp\left(2\pi i \frac{hm}{n}\right) \sum_{j|(h, n)} \mu(j) \\ &= \sum_{h=1}^n \exp\left(2\pi i \frac{hm}{n}\right) \sum_{\substack{d|n \\ n/d|h}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{\substack{h=1 \\ n/d|h}}^n \exp\left(2\pi i \frac{hm}{n}\right) \\ &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{k=1}^d \exp\left(2\pi i k \frac{m}{d}\right) = \sum_{\substack{d|n \\ d|m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d. \end{aligned}$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

**Aufgabe 714.** Es seien  $ABC$  ein Dreieck und  $S$  ein innerer Punkt von  $ABC$ . Die Transversalen  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$  sollen die Gegenseiten in den Punkten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  treffen. Es seien ferner

$$u = \frac{\overline{AS}}{\overline{SP}}, \quad v = \frac{\overline{BS}}{\overline{SQ}}, \quad w = \frac{\overline{CS}}{\overline{SR}}, \quad x = \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}, \quad y = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}, \quad z = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}}.$$

Man zeige, dass jeder der zwanzig 3reihigen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 1 & -y & 1 & 0 \\ 1 & -v & 1 & 0 & -z & 1 \\ 1 & 1 & -w & 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

verschwindet und gewinne daraus bekannte Sätze der Elementargeometrie.

I. Paasche, München, BRD

*Lösung:* Da  $S$  im Inneren der konvexen Hülle von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  liegt, gibt es eindeutig bestimmte positive reelle Zahlen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  mit  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  und  $\alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SB} + \gamma \overrightarrow{SC} = 0$ . Für die sechs Streckenverhältnisse ergibt sich dann

$$x = \frac{\beta}{\gamma}, \quad y = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad z = \frac{\alpha}{\beta}, \quad u = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \quad v = \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \quad w = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}.$$

Bezeichnet man nun die Zeilen der zu untersuchenden Matrix mit  $z_1, z_2, z_3$ , so gilt  $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = (0, \dots, 0)$ . Also ist der Rang der Matrix kleiner als 3. Nach einem bekannten Satz der linearen Algebra verschwinden dann aber alle 20 3reihigen Minoren.

Für die zu folgernden Sätze der Elementargeometrie werden die Spalten der Matrix mit  $s_1, \dots, s_6$  bezeichnet.

a)  $|s_4, s_5, s_6| = 0 = -xyz + 1$ , Satz von Ceva.

b)  $|s_1, s_2, s_3| = 0 = -uvw + 2 + u + v + w$ , oder gleichwertig

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1, \quad \text{Satz von Euler-Gergonne.}$$

- c)  $|s_1, s_4, s_5| = 0 = yz + 1 - uz$  sowie die zyklischen Analoga  
 $|s_2, s_5, s_6| = 0, |s_3, s_4, s_6| = 0$ , Beziehungen von H. van Aubel.
- d) Ist  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks, so gilt  $x = y = z = 1$ , und aus c) folgt dann  
 $u = v = w = 2$ , das heisst die Teilung der Seitenhalbierenden durch  $S$  im Ver-  
 hältnis 2:1. M. Vowe, Therwil BL

Eine weitere Lösung sandte G. Bercea (München, BRD).

*Anmerkung des Aufgabenstellers:* Dieselbe Aufgabe lässt sich für einen äusseren Punkt eines gegebenen Dreiecks stellen, falls er nicht auf der Trägergeraden einer Seite liegt. So ist etwa dann  $|s_2, s_3, s_6| = 0$  der Satz von Ceva für das Dreieck  $SBC$  mit Cevapunkt  $A$ . Im übrigen ist  $|s_1, s_4, s_6| = 0$  der Satz von Menelaos für das Dreieck  $ACP$  mit Menelaosgeraden  $BQ$ .

**Aufgabe 715.** (Même notation que dans Aufgabe 712). a) Démontrer qu'on obtient les lignes des centres des deux groupes de cercles de Steiner d'un quadrilatère complet, en joignant le centre  $C_M$  du cercle de Miquel aux points de rencontre  $M_1, M_2$  avec l'axe  $OM$  du cercle de centre  $M$  et de rayon  $R_M$ , puis en abaissant de  $M$  les perpendiculaires sur les droites  $M_1C_M, M_2C_M$ .

b) Démontrer que la distance entre les points limites de l'un des systèmes de cercles de Steiner est égale à  $(2/\mu) \sqrt{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}$ , c'est-à-dire à  $4 \sqrt{\mu R_M}$ .

J. Quoniam, St-Etienne, France

*Solution par l'auteur:* a) L'équation du cercle  $(\delta_1)$  passant par les sommets  $A_{12}, A_{34}$  du quadrilatère complet ( $A_{ij}$ : point d'intersection des droites  $a_i, a_j$ ) et les intersections des bissectrices intérieures  $B_{12}$  et  $B_{34}$  et des bissectrices extérieures  $B'_{12}$  et  $B'_{34}$  peut, en utilisant les abréviations suivantes:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} &= (\alpha - \beta)(\gamma - \delta); & D_{\alpha\beta} &= R_\alpha R_\beta - R_\gamma R_\delta; & E_{\alpha\beta} &= \alpha\beta R_\gamma R_\delta - \gamma\delta R_\alpha R_\beta; \\ N &= \mu^2 \sum \alpha\beta - M - \mu^4 + R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta; & N' &= \mu^2 \sum \alpha\beta - M - \mu^4 - R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta; \\ D &= \mu(\mu^2 \sum \alpha - \sum \alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} &\mu^2 \{ \mu^2 D_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} \} (x^2 + y^2) - \mu \{ D_{\alpha\beta} (N + 2\mu^4) + 2\mu^2 E_{\alpha\beta} \} y - \mu \{ D \cdot D_{\alpha\beta} \} x \\ &+ \frac{1}{2} \{ \mu^2 D_{\alpha\beta} (N + N' + 2\mu^4) + E_{\alpha\beta} (N' - N + 2\mu^4) \} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient angulaire de la droite joignant le point de Miquel au centre  $C(\delta_1)$  s'obtient sous la forme  $N/D$ , indépendante des coefficients  $D_{\alpha\beta}$  et  $E_{\alpha\beta}$ , et par conséquent sous une forme identique pour les droites joignant le point de Miquel aux centres des cercles  $(\delta_2)$  et  $(\delta_3)$ .

Les cercles de Steiner proprement dits, de ce groupe, ayant pour équations

$$\begin{aligned} &+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0 \\ &- C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0 \\ &+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) - C_{\alpha\gamma}(\delta_2) + C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0 \\ &+ C_{\alpha\beta}(\delta_1) + C_{\alpha\gamma}(\delta_2) - C_{\alpha\delta}(\delta_3) = 0 \end{aligned}$$

les quatre centres de ces cercles ont la même ligne des centres que  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ .

Calculs et résultats similaires pour les cercles  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$ ,  $(\gamma_3)$  et les cercles de Steiner proprement dits de la seconde série dont les centres sont situés sur une droite passant par  $M$  et de coefficient angulaire  $N'/D$ .

Les coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$  sont:  $x = 0; y = \mu - R_M; x = 0; y = \mu + R_M$ , on trouve pour les coefficients angulaires de  $C_M M_1$  et de  $C_M M_2$   $N/D$  et  $N'/D$  respectivement. Ces droites étant perpendiculaires on a  $NN' = -D^2$ .

b) En cherchant l'intersection du cercle  $(\delta_1)$  avec la droite  $y = \mu + (N'/D)x$  on obtient finalement l'équation  $2\mu^2 x^2 = N$

$$\text{d'où } x = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad \text{et} \quad y = \mu \pm \frac{N'}{\mu D} \sqrt{\frac{N}{2}}$$

finalement, on obtient pour la distance entre les points limites du faisceau des cercles  $\gamma$  [points communs des cercles du groupe  $(\delta)$ ] l'expression:

$$\frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{N-N'}{2}} = \frac{2}{\mu} \sqrt{R_\alpha \cdot R_\beta \cdot R_\gamma \cdot R_\delta} \quad \text{ou} \quad 4 \sqrt{\mu \cdot R_M}$$

**Aufgabe 716.** Bezeichnen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Masse der Innenwinkel eines Dreiecks, so gilt

$$\sum_{i=1}^3 (\sin 3\alpha_i - \sin 2\alpha_i + \sin \alpha_i) \geq 0$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

*Lösung:* Wegen

$$\sin 3\alpha_i - \sin 2\alpha_i + \sin \alpha_i = 4 \sin \alpha_i - 4 \sin^3 \alpha_i - \sin 2\alpha_i$$

ergibt sich zusammen mit

$$\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i = \frac{s}{R}, \quad \sum_{i=1}^3 \sin^3 \alpha_i = \frac{s(s^2 - 6Rr - 3r^2)}{4R^3}, \quad \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i = \frac{2sr}{R^2}$$

(vgl. z.B. die Lösung von Aufgabe 672, Band 28, p. 75) aus der behaupteten Ungleichung die zu ihr äquivalente Ungleichung

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Diese Ungleichung ist bekanntlich richtig (vgl. z.B. J. Steinig, Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle, *El. Math.* 18 (1963), p. 128, (7)) mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

H. Frischknecht, Berneck SG

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), G. Bercea (München, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf SO), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil BL) und H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

*Anmerkung der Redaktion:* L. Bankoff teilt mit, dass dieselbe Aufgabe als Nr. 288 zu finden ist im *Pi Mu Epsilon Journal* 5 (1973), p. 483–484. F. Leuenberger weist darauf hin, dass die linke Seite der behaupteten Ungleichung  $(s/R^3) \overline{IH}^2$  ist, wobei  $I$  den Inkreismittelpunkt und  $H$  den Höhenschnittpunkt des in Frage stehenden Dreiecks bezeichnen.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Oktober 1975**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem . . . A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 737.** (Für die Zwecke dieser Aufgabe wird 1 zu den Primzahlen gerechnet.) Eine Nichtprimzahl  $k$  heiße eine P-Zahl, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Jede Primzahl lässt, durch  $k$  dividiert, als kleinsten positiven Rest wieder eine Primzahl. Man bestimme alle P-Zahlen. P. Wilker, Bern

**Aufgabe 738.** a) Es sei ein Parallelogramm  $ABCD$  gegeben, und  $E, F$  bezeichnen Punkte auf  $BC$  bzw.  $CD$ . Die Parallele durch  $D$  zu  $FB$  schneide  $AB$  im Punkt  $G$ . Der Schnittpunkt von  $DE$  mit  $BF$  sei  $H$ . Man zeige, dass  $AH$  und  $GE$  parallel sind (Keine analytische Lösung!).

b) Man beweise mit Hilfe von a) den bekannten Satz, dass ein Dreieck mit zwei gleichlangen Winkelhalbierenden gleichschenkelig sei. G. Bercea, München, BRD

**Aufgabe 739.** Es seien  $M$  eine endliche Menge und  $f$  eine Abbildung von  $M$  in sich. Ferner seien  $k$  die kleinste natürliche Zahl mit  $f^k(M) = f^{k+1}(M)$  und  $i$  die kleinste natürliche Zahl mit  $f^{i+1} \in \{f, f^2, \dots, f^i\}$ . Setzt man  $f^k(M) = X$ , so ist die Einschränkung  $g$  von  $f$  auf  $X$  eine Permutation von  $X$ . Man beweise: Ist  $r$  die Ordnung von  $g$ , so gilt  $i = k + r - 1$  und  $f^{i+1} = f^k$ .

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

**Aufgabe 740.** a) Dans un quadrilatère complet formé par les droites  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , les tangentes en  $A_{12}$  aux cercles  $(\alpha_3)$  et  $(\alpha_4)$  [ $(\alpha_i)$  cercle circonscrit au triangle obtenu en supprimant la droite  $a_i$ ] rencontrent les droites  $a_3, a_4$  respectivement en des points  $R_{A_{12}(\alpha_3)a_3}$  et  $R_{A_{12}(\alpha_4)a_4}$  qui sont situés sur le cercle  $A_{12}MA_{34}$  [ $M$  (point de Miquel), le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec les quatre côtés].

b) Les cercles  $A_{12}MA_{34}, A_{13}MA_{24}, A_{14}MA_{23}$  coupent chacun en un second point différent de  $M$  les «droites de Steiner»  $\Delta$  et  $\Gamma$  [lignes des centres respectifs des deux groupes de cercles de Steiner et des deux groupes de trois cercles  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$  et  $(\gamma_1), (\gamma_2), (\gamma_3)$ , dont les combinaisons d'équations indiquées en Aufgabe 415 a) fournissent les équations des cercles de Steiner proprement dits].  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  désignant respectivement les seconds points d'intersection des trois cercles  $A_{12}MA_{34}, \dots$  avec les droites  $\Delta$  et  $\Gamma$ , les droites  $\delta_1\gamma_1, \delta_2\gamma_2, \delta_3\gamma_3$  qui joignent les points situés sur un même cercle sont les médiatrices de  $A_{12}A_{34}, A_{13}A_{24}$  et  $A_{14}A_{23}$ , et les six points  $\delta_1, \delta_2, \delta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sont les centres des cercles  $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3); (\gamma_1), (\gamma_2), (\gamma_3)$ .

c) Les tangentes en

$A_{23}$  au cercle  $(\alpha_1)$ , en  $A_{13}$  au cercle  $(\alpha_2)$ , en  $A_{12}$  au cercle  $(\alpha_3)$   
concourent en  $z_4$  sur  $(\alpha_4)$ .

J. Quoniam, St-Etienne, France