Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten

Autor(en): **Schröder, Eberhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30648

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 30 | Heft 3 | Seiten 49–72 | 10. Mai 1975

Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten

Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist eine auf K. H. Schellbach (1843) zurückgehende und in viele Lehrbücher der darstellenden Geometrie aufgenommene Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes K zu einem Punkt P eines Kegelschnittes $\varkappa$ bei Vorgabe einer Achse a und des Mittelpunktes M (Abb. 1), (vgl. [1]). Diese Konstruktion legt die Aufgabenstellung nahe, aus den vorgegebenen Punkten K, P und M die Achse a zu ermitteln. Noch allgemeiner kann nach dem Achsenhüllgebilde des durch die Punkte P und K sowie den gemeinsamen Durchmesser d ($P \in d$) festgelegten hyperoskulierenden Büschels von Kegelschnitten $\{\varkappa\}$ gefragt werden. Diese Vorgaben sind äquivalent damit, dass die Kegelschnitte von $\{\varkappa\}$ in P einen gemeinsamen Oskulationskreis und eine gemeinsame Affinnormale d besitzen. Je zwei nicht zerfallende Kegelschnitte des Büschels berühren sich also in P von dritter Ordnung. Dabei kann der Mittelpunkt M von $\varkappa$ jede beliebige Lage auf d ausser $M = P$ annehmen. Im Fall der Ellipse liegen K und M auf einer Seite der durch P gehenden Tangente t; im Fall der Hyperbel werden K und M von t getrennt.

Für die folgenden Rechnungen werde P in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Dabei deckt sich die Tangente mit der x-Achse, die

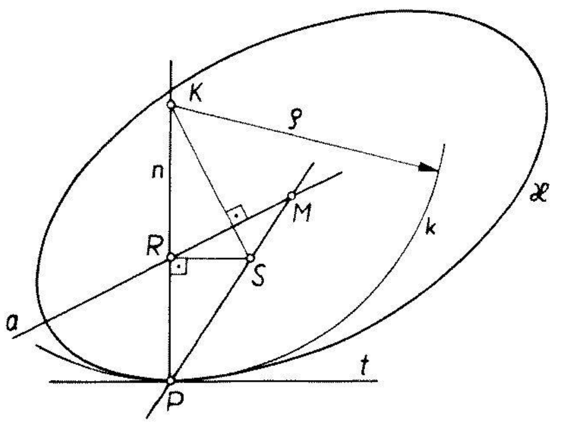

Abb. 1

Normale mit der y-Achse. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, dass für den Radius ϱ des Krümmungskreises $\varrho > 0$ und für den Anstieg m des gemeinsamen Durchmessers $m = \tan\varphi > 0$ gilt. Ferner bietet sich aus der Schellbachschen Konstruktion an, die orientierte Strecke $\overline{RS} = u$ als Büschelparameter einzuführen. Dann besteht zwischen den Wertebereichen von u und den Arten von Kegelschnitten offensichtlich folgende Zuordnung:

$-\infty < u < 0$	Hyperbel	$\frac{\varrho m}{m^2+1} < u < \frac{\varrho}{m}$	Hyperbel
$u = 0$	Zerfall		
$0 < u < \frac{\varrho m}{m^2+1}$	Ellipse	$u = \frac{\varrho}{m}$	Zerfall
$u = \frac{\varrho m}{m^2+1}$	Parabel	$\frac{\varrho}{m} < u < \infty$	Ellipse

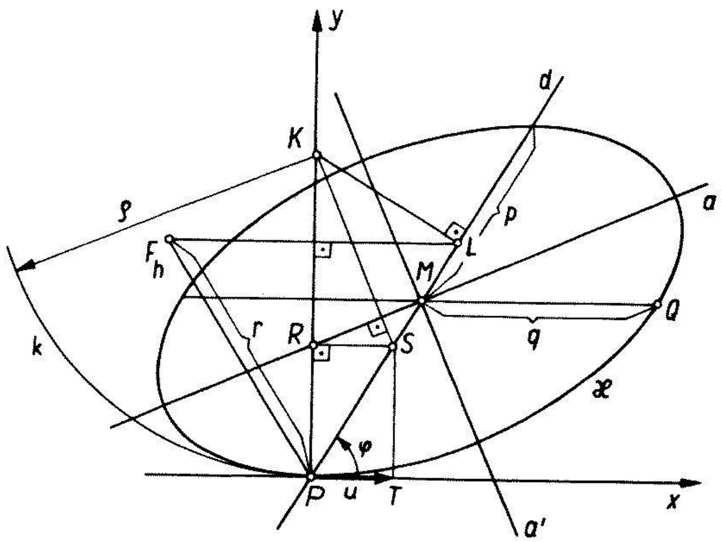

Abb. 2

Aus Abb. 2 ist mit den oben eingeführten Grössen folgende Gleichung für die Achse a abzulesen:

$$u x + (u m - \varrho)\, y + u m\, (\varrho - u m) = 0\,. \tag{1}$$

Durchläuft u den Wertebereich $(-\infty, \infty)$, so ergibt sich eine Schar von Achsen $\{a\}$, deren Hüllgebilde sich durch elementare Zwischenrechnung finden lässt. Man erhält:

$$(x + m y)^2 + m \varrho\, (2x - 2 m y + m \varrho) = 0\,. \tag{2}$$

Die eine Schar der zu $\{\varkappa\}$ gehörigen Achsen $\{a\}$ umhüllt die durch Gleichung (2) beschriebene Parabel π_h. Sie soll im folgenden als Achsenhüllparabel bezeichnet werden.

Die Achsenhüllparabel berührt die x-Achse (Tangente) im Punkt $J(-\varrho m, 0)$ und die y-Achse (Normale) im Krümmungsmittelpunkt $K(0, \varrho)$. Ihre Achse steht senkrecht auf dem gemeinsamen Durchmesser d. Die Gleichungen der von der Ferngeraden verschiedenen Tangenten aus den absoluten Kreispunkten $I_1(0{:}1{:}i)$ und $I_2(0{:}1{:}-i)$ an π_h lauten:

$$i_1 \ldots y = i\, x + \frac{m \varrho}{1 + m^2}\,(m + i)\,, \tag{3}$$

$$i_2 \ldots y = -i\, x + \frac{m \varrho}{1 + m^2}\,(m - i)\,. \tag{4}$$

Diese Tangenten sind zugleich die Minimalgeraden durch den Brennpunkt F_h der Achsenhüllparabel π_h. Aus (3) und (4) resultieren die Brennpunktkoordinaten

$$F_h\left(-\frac{\varrho m}{1+m^2}, \frac{\varrho m^2}{1+m^2}\right). \tag{5}$$

Fällt man von dem Krümmungsmittelpunkt K das Lot auf den Durchmesser d, ergibt sich der Lotfusspunkt L mit den Koordinaten

$$L\left(\frac{\varrho m}{1+m^2}, \frac{\varrho m^2}{1+m^2}\right). \tag{6}$$

Nach (5) und (6) liegen L und F_h spiegelbildlich bezüglich der Normalen n durch P und es gilt

$$|K F_h| = |K L|. \tag{7}$$

Aus (7) folgt, dass der den Kegelschnitten von $\{\varkappa\}$ gemeinsame Durchmesser d die Leitgerade der Achsenhüllparabel π_h ist. Da sich ferner die Achsen a und a' von jedem Kegelschnitt aus $\{\varkappa\}$ in M senkrecht schneiden und $M \in d$ gilt, ist auf Grund einer bekannten Parabeleigenschaft das Hüllgebilde der Schar von Achsen $\{a'\}$ identisch mit dem Hüllgebilde von $\{a\}$. Folglich gilt der Satz:

Die Menge der Achsen eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüchels $\{\varkappa\}$ umhüllen eine Parabel (Achsenhüllparabel). Die Achse der in dem Büschel enthaltenen Parabel ist die Scheiteltangente, und der den Kegelschnitten von $\{\varkappa\}$ gemeinsame Durchmesser ist die Leitgerade der Achsenhüllparabel. Fällt man vom Mittelpunkt des Oskulationskreises das Lot auf den gemeinsamen Durchmesser und spiegelt den erhaltenen Lotfusspunkt an der Normalen, so ergibt sich der Brennpunkt der Achsenhüllparabel (Abb. 3).

Bemerkenswert ist an dieser Stelle ein von Jakob Steiner aufgestellter Satz. Er lautet: Diejenige Parabel, welche die zu einem beliebigen Punkt P des Kegelschnittes $\varkappa$ gehörende Tangente und Normale und ausserdem (für Ellipse und Hyperbel) deren Achsen berührt, beziehungsweise (bei der Parabel) die Achse zur Scheiteltangente hat, berührt die Normale in dem zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt.

Daraus lassen sich, wie C. Pelz gezeigt hat, die zahlreichen bekannten Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten zu beliebigen Punkten von Kegelschnitten ableiten. Der Satz sagt jedoch nichts über den Berührungspunkt der Tangente des Kegelschnittes mit der Parabel aus. Er lässt somit nicht den Schluss zu, dass diese Parabel das Achsenhüllgebilde eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels ist.

Das hier gefundene Ergebnis soll auf die Konstruktion der Achsen eines Kegelschnittes $\varkappa$ angewendet werden, wenn von diesem der Mittelpunkt M, ein Punkt $P \in \varkappa$ und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt K gegeben sind.

Von K fällt man das Lot auf den Durchmesser $d = (M P)$ und spiegelt den Lotfusspunkt L an n. Damit liegen Brennpunkt und Leitgerade der Achsenhüllparabel vor. Nun zieht man durch F_h eine Parallele zu d und schlägt um F_h einen Kreis mit dem Radius $\sigma = |M F_h|$. Dieser schneidet die Parallele zu d in den Punkten I und II.

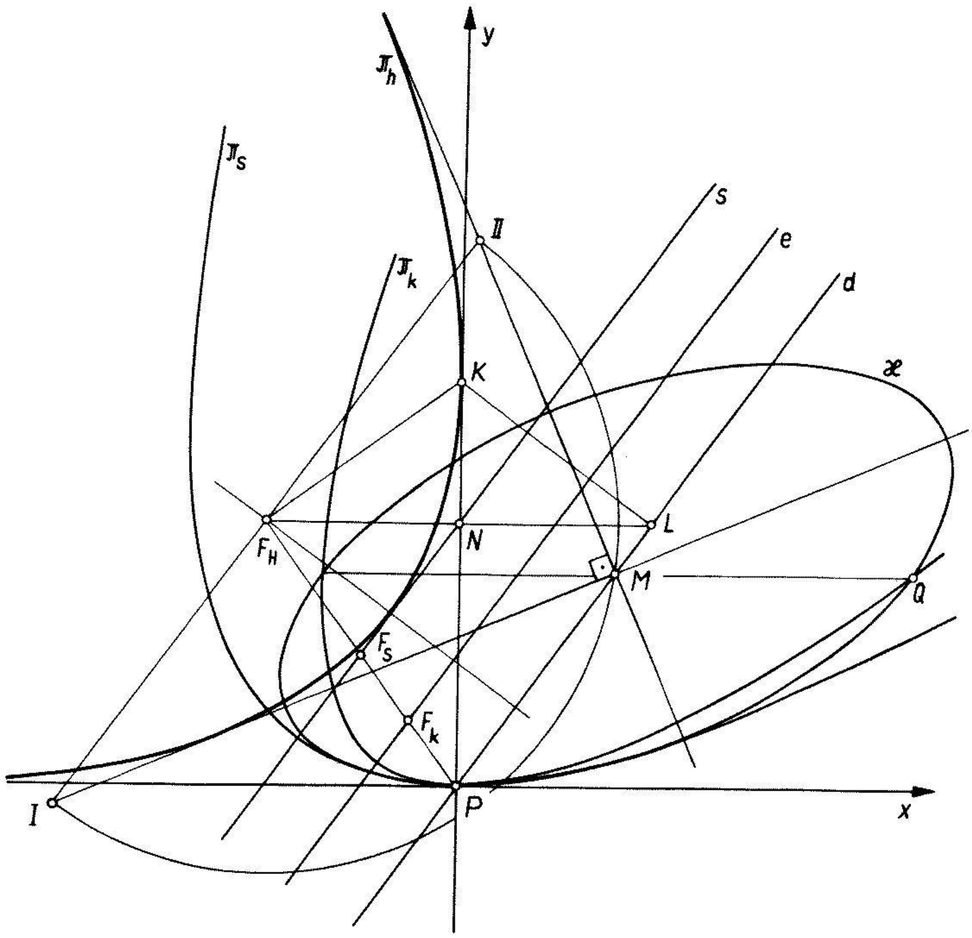

Abb. 3

Die Verbindungsgeraden $a = (M\,I)$ und $a' = (M\,II)$ stehen aufeinander senkrecht und berühren nach bekannten Sätzen die Parabel π_h. Sie sind demnach die Achsen des durch P, M und K bestimmten Kegelschnittes $\varkappa$ (Abb. 4).

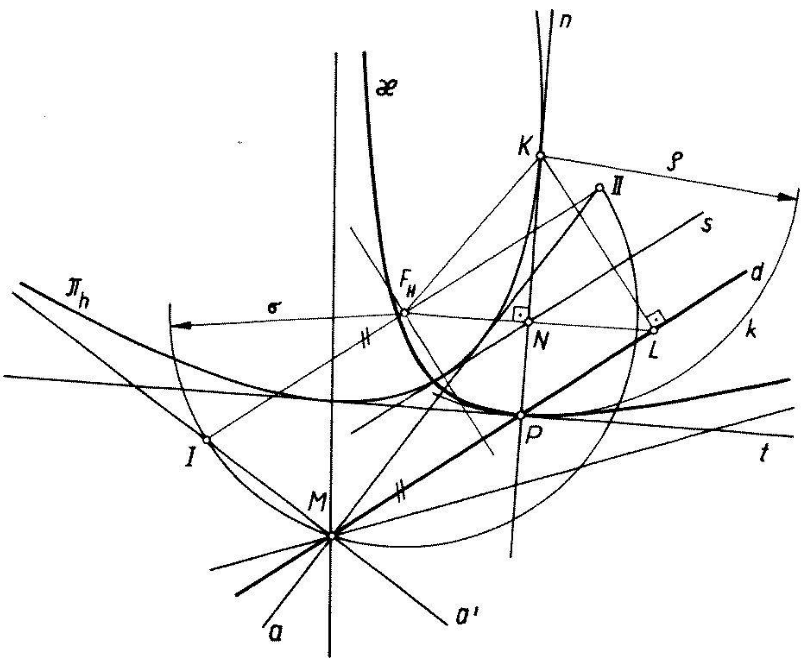

Abb. 4

In diesem Zusammenhang sind zwei weitere Parabeln von Interesse. Die dem Büschel $\{\varkappa\}$ angehörende Parabel hat die Gleichung

$$(mx - y)^2 - 2m^2 \varrho y = 0\,. \tag{8}$$

Die Achse dieser Parabel π_s fällt mit der Scheiteltangente von π_h zusammen. Für die Koordinaten des Brennpunktes findet man wie oben

$$F_s\left(-\frac{\varrho m}{2(1+m^2)},\ \frac{\varrho m^2}{2(1+m^2)}\right). \tag{9}$$

Ein Vergleich von (9) mit (5) zeigt, dass F_s der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{PF_h}$ ist.

Die Frage nach dem geometrischen Ort der Endpunkte der in bezug auf d konjugierten Durchmesser aller in $\{\varkappa\}$ enthaltenen Ellipsen führt auf eine weitere Parabel π_k mit der Gleichung

$$(mx - y)^2 - \varrho m^2 y = 0\,. \tag{10}$$

Ihre Achse ist die Mittellinie der Leitgeraden d und der Scheiteltangente s von π_h, und ihr Brennpunkt F_k ist Halbierungspunkt der Strecke $\overline{PF_s}$ (vgl. Abbildung 3).

Das oben gefundene Ergebnis soll noch dazu ausgewertet werden, Haupt- und Nebenachse einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser konstruktiv zu finden.

Die Gleichung einer Ellipse aus dem hier betrachteten Büschel $\{\varkappa\}$ hat die allgemeine Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0 \quad \text{mit} \quad AC - B^2 > 0\,. \tag{11}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $A > 0$ gilt. Dann folgt $B < 0$, $C > 0$, $D < 0$ (vgl. Abb. 2).

Für die Längen der konjugierten Halbmesser findet man

$$|PM| = -\frac{D\sqrt{A^2+B^2}}{AC-B^2},\quad |QM| = -\frac{D}{AC-B^2} \tag{12}$$

und für den Krümmungsradius bzw. Durchmesseranstieg

$$\varrho = -\frac{D}{A},\quad m = -\frac{A}{B}. \tag{13}$$

Wegen $|PF_h| = \varrho\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ folgt mit $|PM| = p$, $|QM| = q$ und $|PF_h| = r$ aus (11)–(13) die Gleichung

$$rp = q^2\,. \tag{14}$$

Mit (14) ist ein konstruktiv wenig aufwendiger Zugang zum Brennpunkt F_h der Achsenhüllparabel auch bei dieser Vorgabe gesichert.

Abbildung 5 zeigt eine Möglichkeit, wie aus den konjugierten Durchmessern von $\varkappa$ unter Einsatz der Achsenhüllparabel Haupt- und Nebenachse von $\varkappa$ konstruktiv gefunden werden können.

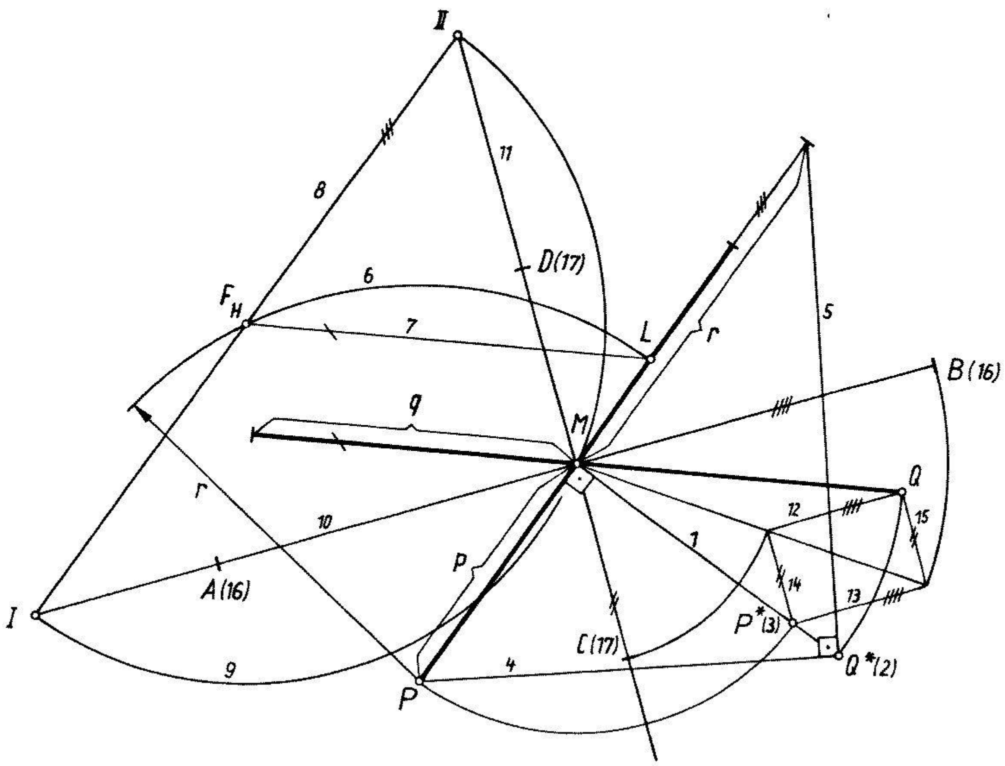

Abb. 5

Im Vergleich zur Rytzschen Konstruktion bietet dieser Lösungsweg vor allem dann den Vorteil grösserer konstruktiver Sicherheit und Genauigkeit, wenn die konjugierten Durchmesser annähernd gleich lang sind und sich unter einem nur wenig von $\pi/2$ abweichenden Winkel schneiden. In jedem Fall liegen die zum Einsatz gelangenden Konstruktionselemente nach dieser Methode weiter auseinander, ohne dass bei Ausführung der Konstruktion der Rahmen des Bildes gesprengt werden muss.

Abschliessend sollen in die Betrachtung des hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels $\{\varkappa\}$ die Krümmungsmittelpunkte K_1 und K_2 der ersten und zweiten Evolute bezüglich P einbezogen werden. Spiegelt man die Affinnormale d an der Normalen n und bringt diese Gerade mit der Parallelen zur Tangente durch K zum Schnitt, ergibt sich ein Punkt H. Wird die Strecke KH über H hinaus noch zweimal auf der Parallelen abgetragen, so führt diese Konstruktion bekanntlich auf den Krümmungsmittelpunkt K_1 der ersten Evolute (vgl. [2]). Es gilt demnach

$$r_1 = \frac{3\varrho}{m}. \tag{15}$$

Für den Anstieg m_1 der Affinnormalen der ersten Evolute findet man

$$m_1 = \frac{m(\varrho - u\,m)^2 + u\,(4\,u\,m - 5\,\varrho)}{3\,u\,m\,(\varrho - u\,m)}. \tag{16}$$

Nach den gleichen Überlegungen wie oben resultiert daraus für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K_2 der zweiten Evolute

$$K_2\left(-\frac{3\varrho}{m},\quad \varrho\left(\frac{3\varrho}{w\,m} - 2 - \frac{12}{m^2}\right)\right) \quad \text{mit} \quad w = \frac{u\,m\,(u\,m - \varrho)}{u\,(1 + m^2) - \varrho\,m}. \tag{17}$$

Der Mittelpunkt M von $\varkappa$ (Schnittpunkt von a und d) hat die Koordinaten

$$M(w, m w)\,. \tag{18}$$

Führt man M und K_2 mit Hilfe von Parallelen zur x-Achse auf die y-Achse, ergeben sich die Punkte U bzw. V. Durchläuft M die Gerade d, so wird auch K_2 auf der Geraden mit der Gleichung $x = -3\varrho/m$ seine Lage in bestimmter Weise variieren. Demnach hat man auf der y-Achse zwei Punktreihen $\{U\}$ und $\{V\}$ in vereinigter Lage. Zur analytischen Behandlung der geometrischen Verwandtschaft setzt man für die Ordinaten von U und V die Variablen ξ bzw. η (Abb. 6). Es gilt nach (17) und (18)

$$\xi = w m, \quad \eta = \varrho \left(\frac{3\varrho}{w m} - 2 - \frac{12}{m^2} \right). \tag{19}$$

Durch Eliminieren von $w = w(u)$ aus (19) erhält man für die geometrische Punktverwandtschaft folgende Gleichung:

$$m^2 \xi \eta + 2\varrho\,(6 + m^2)\,\xi - 3 m^2 \varrho^2 = 0\,. \tag{20}$$

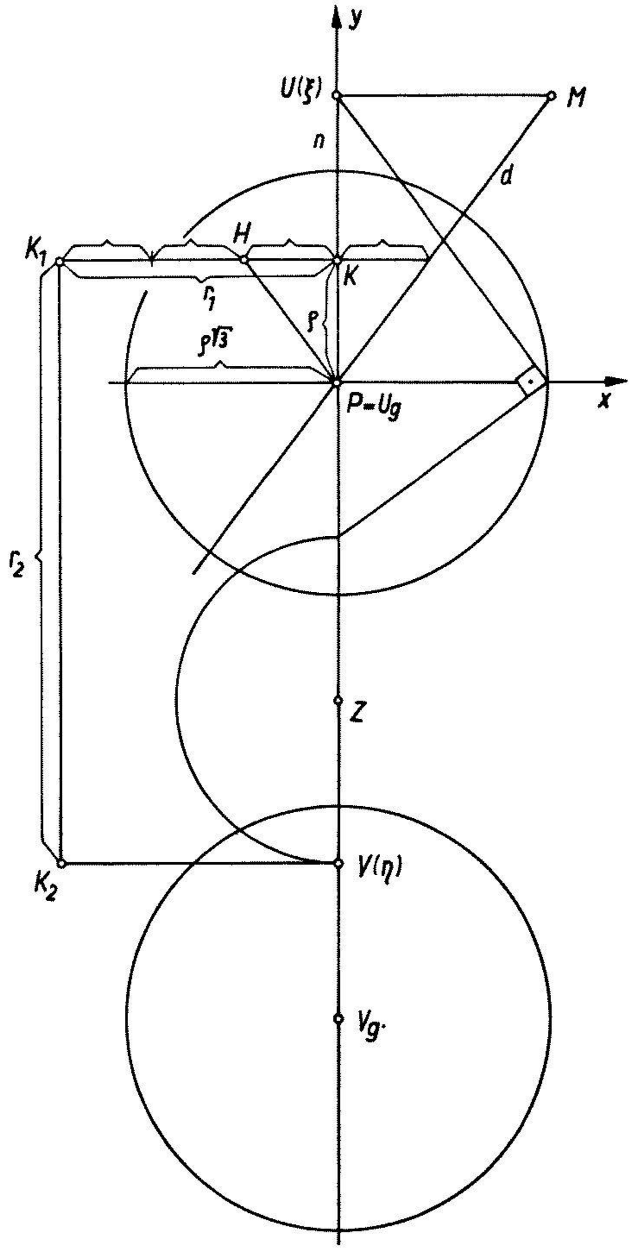

Abb. 6

Nach Gleichung (20) bilden $\{U\}$ und $\{V\}$ gegenläufige projektive Punktreihen in vereinigter Lage. Für die Gegenpunkte U_g und V_g der Projektivität ergeben sich die Ordinaten

$$\xi_g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \eta_g = -\frac{2\varrho\,(6+m^2)}{m^2}. \tag{21}$$

Mit Hilfe von (21) erhält man für die Potenz dieser Projektivität

$$k^2 = 3\varrho^2 \tag{22}$$

und die Charakteristik der Projektivität

$$\delta = \frac{6+m^2-2\sqrt{G}}{6+m^2+2\sqrt{G}} \quad \text{mit} \quad G = 9+3m^2+m^4. \tag{23}$$

Mit den Ergebnissen (21) und (22) ist ein gut überschaubarer konstruktiver Zugang für jedes beliebige Punktepaar $\{U, V\}$ und damit auch für die Punktepaare $\{M, K_2\}$ gesichert (vgl. Abb. 6) (vgl. Sonderfall für Scheitelpunkte in [3]). Bei Vorgabe eines Kegelschnittes $\varkappa$ (etwa durch dessen Achsen) ist es mit diesen Mitteln möglich, die Krümmungsmittelpunkte K, K_1 und K_2 zu jedem beliebigen Punkt $P \in \varkappa$ zu konstruieren. Umgekehrt ist auch $\varkappa$ eindeutig konstruierbar, wenn zu einem Punkt $P \in \varkappa$ die Krümmungsmitten K, K_1 und K_2 vorgelegt sind.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Strubecker, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958), S. 33.

[2] E. Kruppa, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 102.

[3] E. Schröder, *Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung* El. Math. *25*, 7–13 (1970).

Kleine Mitteilungen

Zero-divisors in a ring of arithmetic functions

In [1, p. 247], M. V. Subbarao introduced a convolution in the set S of all arithmetical functions, which he called 'exponential convolution' as follows:

$$(\alpha \circ \beta)\,(1) = \alpha(1)\,\beta(1),$$

$$(\alpha \circ \beta)\,(n) = \sum_{\substack{d_i \mid a_i \\ i=1,2,\ldots,r}} \alpha(p_1^{d_1} \ldots p_r^{d_r})\,\beta(p_1^{a_1/d_1} \ldots p_r^{a_r/d_r}),$$

if $\alpha, \beta \in S$ and $n > 1$ has the canonical representation $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$.