Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 4

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Hence a solution of $\sigma^k(n) = 2n$ is possible only if $m = 1$, that is, if $n = 2^a$, in which case:

$$\sigma^k(n) = \sigma^{k-1}(2^{a+1} - 1)$$
$$\geq (k-1) + (2^{a+1} - 1)\,.$$

The last inequality forces k to be equal to 2 and $2^{a+1} - 1$ to be prime.

To conclude the proof it suffices to note that if p is a Mersenne prime then $(p+1)/2$ satisfies $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

Graham Lord, Temple University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford 1960), p. 240.

[2] D. SURYANARAYANA, *Super Perfect Numbers*. El. Math. *24*, 16–17 (1969).

Aufgaben

Aufgabe 721. The question whether, for an integer $n > 1$, $\varphi(n) \mid (n-1)$ implies that n is a prime, is open (cf., e.g., American Math. Monthly *80*, 192–193 [1973]). Show that if $n = 2^{2^s} + 1$ $(s \geq 0)$ and $\varphi(n) \mid (n-1)$, then n is a prime.

J. Steinig, Genève

Solution: We show the more general result that n is a prime whenever $n = 1 + q^t$ ($t > 0$, q prime) and $\varphi(n) \mid (n-1)$. (If this is true then we must have $q = 2$, for otherwise n is even and $n > 2$, since $t > 0$, so n cannot be a prime.) Let $n = 1 + q^t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$, $\alpha_i \geq 1$. Clearly, $p_i \nmid q$. From the condition $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_l^{\alpha_l-1} \prod_{i=1}^{l} (p_i - 1) \mid (n-1) = q^t$, it follows that $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_l = 1$ and $p_i = q^{t_i} + 1$, $t_i \geq 0$. Without loss of generality $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ and consequently $t_1 < t_2 < \cdots < t_l$. If $l > 1$ then $n = p_1 p_2 \cdots p_l = 1 + q^{t_1} + q^{t_2} + \cdots + q^{t_l} + q^{t_1+t_2} + \cdots + q^{t_1+t_2+\cdots+t_l}$

and

$$n - 1 = q^t = q^{t_1} + q^{t_2} + \cdots + q^{t_l} + q^{t_1+t_2} + \cdots + q^{t_1+t_2+\cdots+t_l} \equiv q^{t_1} \pmod{q^{t_1+1}}\,,$$

a contradiction.

Apparently $l = 1$, $t = t_1$ and $n = p_1$.

O. P. Lossers, Eindhoven, The Netherlands

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), E. P. Bauhoff (Mannheim, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodersdorf, SO), P. Kiss (Eger, Ungarn), A. Marshall (Madison, Wisconsin, USA), Chr. A. Meyer (Bern), H. Müller (Berlin), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), M. Vowe (Therwil, BL) und R. Wyss (Flumenthal, SO).

Aufgabe 722. Man beweise die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n^2+k^2} = \frac{1}{4}(\pi - \ln 4)\,.$$

G. Bercea, München, BRD

Lösung (*mit Verallgemeinerung*): Sind c_0, c_1 reelle Konstanten, so folgt unmittelbar aus der Definition des Riemannschen Integrals

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_0}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2+k^2}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_0 n + c_1 k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_0 + c_1 k/n}{1+(k/n)^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\int_0^1 \frac{c_0 + c_1 x}{1+x^2}\, dx = c_0 \cdot \operatorname{arctg} 1 + c_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{1}{4}(c_0 \pi + c_1 \ln 4)\,.$$

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten E. Braune (Linz, Österreich), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. W. Gould (Morgantown, West Virginia, USA), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodersdorf, SO), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern), R. Shantaram (Flint, Michigan, USA), J. R. Smart (Madison, Wisconsin, USA), Hj. Stocker (Wädenswil, ZH), M. Vowe (Therwil, BL) und R. Wyss (Flumenthal, SO).

Anmerkung: L. Hämmerling führt den Beweis für

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-ka}{n^2+k^2 a^2} \quad (0 < a \le 1)\,.$$

Aufgabe 723. On donne deux cercles Γ_1 et Γ_2, ayant O et K' comme centres de similitude externe et interne; une droite OAB et le cercle Γ tangent en A et B aux cercles Γ_1 et Γ_2. Quel est le lieu du point z, intersection de la polaire de K' par rapport à Γ et de la droite OAB? J. Quoniam, St-Etienne, France

Lösung: Unter Ausschliessung des trivialen Falles gleich grosser Kreise Γ_1 und Γ_2, für die O ein Fernpunkt ist, seien die Radien der Kreise Γ_1 und Γ_2 mit r und kr ($k > 0$, $k \neq 1$) und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 von O mit m bzw. km bezeichnet. Die Tangenten an die Kreise Γ_1 und Γ_2 in den Punkten A bzw. B berühren auch Γ in diesen Punkten; ihr Schnittpunkt P, der von A und B gleich weit entfernt ist ($PA = PB$), ist der Pol der Geraden $OAB = p$ in bezug auf Γ. In der Polarität bezüglich Γ ist der Schnittpunkt Z der Polaren von K' mit der Polaren p von P der Pol der Gerade PK', so dass das Tangentenpaar PA, PB und das Strahlenpaar PZ, PK' einander harmonisch teilen. Daher sind auch die Schnittpunkte dieser Strahlen mit p, also die Punkte A, B, Z und der Schnittpunkt mit PK' ein harmonischer Punktwurf. Die Kreise Γ_1 und Γ_2 werden von p noch ein zweites Mal in den Punkten A' bzw. B' geschnitten und dort von einem Kreis Γ' berührt. Daher liefert auf jeder Geraden p durch O der Schnittpunkt mit der Polaren von K' bezüglich Γ' noch einen weiteren Punkt Z'.

Die gesuchte Ortskurve wird mithin von jeder Geraden durch O in zwei (reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert komplexen) Punkten geschnitten, ist also im wesentlichen ein Kegelschnitt. Ist p_t insbesondere eine durch O gehende gemeinsame Tangente von Γ_1 und Γ_2, so sind $A_t = A'_t$ und $B_t = B'_t$ die Berührungspunkte von p_t mit Γ_1 bzw. Γ_2, $P_t = P'_t$ ist der Halbierungspunkt von $A_t B_t = A'_t B'_t$ und daher fallen Z'_t und Z'_t in den Fernpunkt von p_t. Die gemeinsamen Tangenten aus O an Γ_1 und Γ_2 sind demnach Asymptoten des Kegelschnitts.

Für die Verbindungsgerade p_x von O mit M_1, M_2 erhält man die Scheitel Z_x und Z'_x des Kegelschnitts.

Wenn die beiden Punktepaare mit den Abszissen x_1, x_2 und x_3, x_4 einander harmonisch trennen, gilt

$$x_4 = \frac{2\,x_1\,x_2 - (x_1 + x_2)\,x_3}{x_1 + x_2 - 2\,x_3}\,.$$

Die Punktepaare M_1, M_2 und O, K', ferner A_x, B_x und K', Z_x, sowie A'_x, B'_x und K', Z'_x liegen jeweils harmonisch. Daher erhält man aus $x_1 = m$, $x_2 = k\,m$, $x_3 = 0$ die Abszisse $2\,k\,m/(k+1)$ von K' und aus $x_1 = m \pm r$, $x_2 = k\,(m \mp r)$, $x_3 = 2\,k\,m/(k+1)$ die Abszisse $\pm\,2\,k\,r/(k-1)$ von Z_x bzw. Z'_x. Der Kegelschnitt hat daher die Gleichung

$$x^2 - \frac{m^2 - r^2}{r^2}\,y^2 = \left(\frac{2\,k\,r}{k-1}\right)^2.$$

Er ist für $m > r$ eine Hyperbel, für $m = r$ (Γ_1 und Γ_2 berühren einander in O) ein paralleles Geradenpaar, für $m < r$ eine Ellipse und da insbesondere für $m = 0$ (Γ_1 und Γ_2 sind konzentrisch) ein Kreis.

Ist S einer der zwei (reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert komplexen und von den absoluten Punkten im allgemeinen verschiedenen) Schnittpunkte von Γ_1 und Γ_2, und fällt p in die Gerade $p_s = OS$, so ist $A_s = B_s = S$, und Γ_s ist der Nullkreis um S. Die harmonischen Punktepaare M_1, M_2 und O, K' werden aus S durch einen harmonischen Strahlwurf projiziert. Da $AA'M_1$ und $BB'M_2$ ähnliche gleichschenklige Dreiecke sind, schliesst p_s mit SM_1 und SM_2 gleiche Winkel ein, und SK' ist daher die zu p_s normale Symmetrale des Winkels M_1SM_2. Die Polare von K' bezüglich Γ_s fällt somit mit p_s zusammen, so dass Z_s jeder Punkt von p_s sein kann. Daher ist das Paar der Verbindungsgeraden von O mit den Schnittpunkten von Γ_1 und Γ_2 ebenfalls ein Bestandteil der gesuchten Ortskurve und hat die Gleichung

$$[r^2\,(k+1)^2 - m^2\,(k-1)^2] \cdot x^2 - (k+1)^2\,(m^2 - r^2)\,y^2 = O\,.$$

Übrigens lässt sich, wenn O der innere und K' der äussere Ähnlichkeitspunkt der Kreise Γ_1 und Γ_2 ist, die analog definierte Ortskurve auf die gleiche Weise ermitteln.

K. Grün, Linz, Österreich

Eine weitere Lösung sandte C. Bindschedler (Küsnacht, ZH).

Aufgabe 724. Es seien k, m, n $(k < n)$ natürliche Zahlen und $\nu\,(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von m. Man beweise: Für $n > (1+\varepsilon)^k$ gilt $\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geq k - c_\varepsilon$, wo c_ε nur von der positiven reellen Zahl ε abhängt.

P. Erdös, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers: Es genügt zu zeigen, dass für $n > (1+\varepsilon)^k$ und $k > k_0(\varepsilon)$

$$\nu\left[\binom{n}{k}\right] > k - c_\varepsilon \tag{1}$$

gilt.

Die Primzahl p gehöre zu $n - i$, $0 \leq i \leq k - 1$, wenn

$$p^\alpha \mid n - i,\ p^\alpha > k \tag{2}$$

gilt. Offenbar gehört eine Primzahl p höchstens zu einer Zahl $n - i$, $0 \leq i \leq k - 1$ (natürlich können aber mehrere Primzahlen p zu $n - i$ gehören). Es seien $0 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq k - 1$ die Zahlen i, wo keine einzige Primzahl zu den Zahlen $n - i_r$, $1 \leq r \leq t$ gehört. Es gilt offenbar

$$\nu\left[\binom{n}{k}\right] \geq k - t\,, \tag{3}$$

da wegen (2) $p \mid \binom{n}{k}$ folgt.

Um (1) zu zeigen, genügt es daher $t < c_\varepsilon$ zu zeigen. Es sei $(n - u, n - v) = d\,(u, v)$ ($(n - u, n - v)$ ist der grösste gemeinsame Teiler). Offenbar gilt

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{r=1}^{t} (n - i_r) \left(\prod_{1 \leq i_{r_1} < i_{r_2} \leq k-1} d\,(n - i_{r_1}, n - i_{r_2})\right)^{-1} \leq \\ &\qquad\qquad \prod_{p < k,\ p^{\alpha_p} < k} p^{\alpha_p} < k^{\pi(k)} < e^{2k} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wegen $\pi(k) < 2\,k/\log k$. Aus (4) folgt nun

$$(n - k)^t < e^k\, k^{\binom{t}{2}}\,. \tag{5}$$

Aus (5) folgt aber durch leichte Rechnung, dass für $n > (1+\varepsilon)^k$, $k > k_0(\varepsilon)$, $t < c_\varepsilon$ und damit wegen (3) (1) folgt.

Die Rechnung ist wirklich leicht. t sei die kleinste Zahl mit $(1+\varepsilon)^t > e^4$, also $t < 4/\log\,(1+\varepsilon)$. Daher $n - k > e^{3k}$, und für $k > k_0(\varepsilon)$ gilt

$$e^k > k^{\binom{t}{2}} \quad \text{für} \quad t < \frac{4}{\log\,(1+\varepsilon)}\,;$$

daher ist (5) falsch für $k > k_0(\varepsilon)$ und $t < 4/\log\,(1+\varepsilon)$.

Durch etwas kompliziertere Rechnung könnte man c_ε explizit berechnen (ohne die Annahme $k > k_0(\varepsilon)$).

Berichtigung

Problem 724A. Gibt es eine natürliche Zahl $k_0(\varepsilon)$ derart, dass, in der Bezeichnung der Aufgabe 724 gilt

$$\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geq k \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0(\varepsilon)\ ?$$

Die Antwort ist dem Aufgabensteller nicht bekannt. P. Erdös, Budapest

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Februar 1976.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91).

Aufgabe 745. In einem ebenen Quadratgitter bezeichne A eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten, $n(A)$ deren Anzahl. Weiter sei $q^2(A)$ die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten, A enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man $d(A) :\doteq n(A)/q^2(A)$. Es wird nun eine Folge $A_0, A_1, \ldots, A_m, \ldots$ von Figuren wie folgt definiert: A_0 ist eine beliebige Ausgangsfigur; A_m entsteht aus A_{m-1}, indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von A_{m-1} mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass $d(A_m) \to {}^1/_2$ $(m \to \infty)$, unabhängig von A_0.

P. Wilker, Bern

Aufgabe 746. Eine Ungleichung am ebenen Dreieck mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck habe die Gestalt

$$0 < X = L\, s^2 \leq M\, r^2 + N\, r\, R + P\, R^2 = Y\,,$$

worin L, M, N, P von s, r, R unabhängige reelle Zahlen sind. Man bestimme bei festem $u > 0$ und festem $v < 2u$ die grösstmögliche Konstante $k \geq 0$, welche die Verschärfung

$$X + k\,(R - 2\,r)\,(u\,R - v\,r) \leq Y$$

von $X \leq Y$ gestattet.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 747. Es sei a eine ganze Zahl. Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ wird der Quotient

$$A_n := \frac{(n-3)!\,(n-1)\,[a\,n^2 + (2\,a+3)\,n - 2] + 1}{n\,(n+2)}$$

ganzzahlig?

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 748. Für natürliche Zahlen n, k bezeichne $[(n+1)\,(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k)]'$ das Produkt der Nichtprimzahlen in der Folge $n+1, n+2, \ldots, n+k$. Man zeige, dass $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$ die einzige Lösung der Gleichung $n! = [(n+1)\,(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k)]'$ ist.

P. Erdös, Budapest, Ungarn