"Höhenschnittpunkte" für n-Simplizes

Autor(en): Fritsch, Rudolf

Objekttyp: Article

Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band (Jahr): 31 (1976)

Heft 1

PDF erstellt am: 12.07.2024

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31389

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 31 Heft 1 Seiten 1–24 10. Januar 1976

«Höhenschnittpunkte» für n-Simplizes

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Für die Höhen eines Simplexes der Dimension $n > 2$, d.h. $n + 1$ Punkte in $\boldsymbol{R}^m$, die nicht in einem $(n - 1)$-dimensionalen affinen Unterraum liegen, gilt das nur noch in Ausnahmefällen. Nun hat der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks aber auch noch andere ausgezeichnete Eigenschaften in Bezug auf das Dreieck, z.B. liegt er auf der Eulerschen Geraden und ist Inkreismittelpunkt des von den Höhenfusspunkten gebildeten Dreiecks; der Schwerpunkt teilt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt im Verhältnis 2:1 usw. [2]. Man kann deshalb versuchen in beliebigen n-Simplizes Punkte zu finden, die eine oder mehrere zu diesen analoge Eigenschaften haben und im Fall der Existenz eines Höhenschnittpunkts mit diesem zusammenfallen. In der vorliegenden Note führen wir das an Hand einer Verallgemeinerung des Satzes vom Feuerbachschen Kreis (§§ 1,3) durch. Als Hilfsmittel für die Darstellung benutzen wir den Bosschen Kalkül (§ 2, [1]).

Diese Überlegungen stehen in engem Zusammenhang mit [3], wo ihr Ursprung beschrieben und weitere Motivation zu finden ist.

§1. Der Satz vom Feuerbachschen Kreis (Neunpunktekreis)

Definition. Der *Feuerbachkreis* eines Dreiecks ist der Umkreis des von den Mittelpunkten der Dreiecksseiten gebildeten Dreiecks.

Satz 1. *Auf dem Feuerbachkreis eines Dreiecks liegen ausser den Mittelpunkten der Dreiecksseiten auch noch die Höhenfusspunkte und die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken vom Höhenschnittpunkt zu den Ecken des Dreiecks.*

Auf einen Beweis oder das Zitat eines Beweises können wir hier verzichten, weil es sich um den 2- dimensionalen Fall des Satzes handelt, den wir für die Dimensionen $n \geq 2$ in § 3 beweisen werden.

Um das bequem tun zu können, wiederholen wir im folgenden kurz die Grundideen des Bosschen Kalküls.

§2. Der Bossche Kalkül

Für die folgenden Betrachtungen legen wir einen festen euklidischen Raum $\mathfrak{E}$ zugrunde. Zeichnen wir einen Punkt $p \in \mathfrak{E}$ als «Grundpunkt» oder «Aufpunkt» aus, so können wir die Punkte von $\mathfrak{E}$ als Vektoren auffassen und erhalten die Struktur eines Vektorraumes mit Skalarprodukt. Wir schreiben dann $x \underset{p}{+} y$ und $\lambda \underset{p}{\cdot} x$ ($x, y \in \mathfrak{E}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$) für die Punkte, die der Summe der «Vektoren» x und y bzw. dem λ-fachen des «Vektors» x entsprechen; ausserdem bezeichne $\left[x \underset{p}{,} y\right]$ das Skalarprodukt der «Vektoren» x und y. Soweit der Aufpunkt p durch den Context bestimmt ist, schreiben wir auch kurz: $x + y$ bzw. λx bzw. $[x, y]$.

Bemerkenswert ist, dass *ein Term der Form*

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_l x_l \tag{1}$$

unter der Voraussetzung

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 1 \tag{2}$$

für jeden Aufpunkt p den gleichen Punkt von $\mathfrak{E}$ beschreibt. Ebenso hat ein Skalarpunkt der Form

$$\left[\sum_{i=0}^{l} \lambda_i x_i, \sum_{j=0}^{m} \mu_j y_j\right] \tag{3}$$

für jeden Aufpunkt p den gleichen Wert, falls gilt:

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 0 \tag{4}$$

und

$$\sum_{j=0}^{m} \mu_j = 0. \tag{5}$$

Diese Tatsachen kann man benutzen, um Aufpunkte zu wechseln. Ist ein Punkt durch einen Term der Form (1) bezüglich des Aufpunktes p gegeben, so erhält man in der Form

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \left(1 - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\right) p \tag{6}$$

eine vom Aufpunkt unabhängige Darstellung desselben Punktes, und dann kann man statt über p über einem beliebigen anderen Aufpunkt rechnen. Analog verfährt man mit einem Skalarprodukt der Form (3) bezüglich eines Aufpunktes p: Eine vom Aufpunkt unabhängige Darstellung ist

$$\left[\sum_{i=0}^{l} \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i\right) p, \sum_{j=0}^{m} \mu_j y_j - \left(\sum_{j=0}^{m} \mu_j\right) p\right]. \tag{7}$$

Das Skalarprodukt werden wir wie üblich zur Abstands- und Winkelmessung benutzen. Für den Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in \mathfrak{E}$ hat man z.B. die Beziehung

$$d(x, y)^2 = \left[x \underset{y}{,} x\right] = [x - y, x - y]. \tag{8}$$

Für die folgenden Ausführungen dürfte diese Skizze des Bosschen Kalküls genügen, zu Einzelheiten sei auf [1] verwiesen.

§3. Feuerbachsphären

Wir betrachten ein festes n-Simplex

$$\Delta = x_o x_1 \dots x_n \tag{9}$$

in unserem Raum $\mathfrak{E}$ ($n \geq 2$). Da sich alle folgenden Überlegungen in dem von Δ aufgespannten euklidischen Unterraum von $\mathfrak{E}$ abspielen, setzten wir von jetzt an voraus, dass $\mathfrak{E}$ mit diesem Unterraum übereinstimmt. Für $i = 0,1,\dots, n$ bezeichne x_i' den Schwerpunkt der der Ecke x_i gegenüberliegenden $(n-1)$-dimensionalen Seite von Δ.

Definition. Die *Feuerbachsphäre* F von Δ ist die Umsphäre[1]) des Simplexes

$$\Delta' = x_o' x_1' \dots x_n'. \tag{10}$$

Zunächst stellt man fest

Satz 2. *Ist s der Schwerpunkt, m der Mittelpunkt der Umsphäre und m' der Mittelpunkt der Feuerbachsphäre von* Δ, *so gilt*

$$m' = \left(-\frac{1}{n}\right)_s m\,; \tag{11}$$

Ist r der Radius der Umsphäre und r' der Radius der Feuerbachsphäre von s, so gilt

$$r' = \frac{1}{n} r. \tag{12}$$

Das ergibt sich daraus, dass man Δ' aus Δ durch zentrische Streckung von S aus um den Faktor $-1/n$ erhält.

Wir wollen nun die Tatsache, dass der Feuerbachkreis eines Dreiecks durch die Höhenfusspunkte geht, auf den n-dimensionalen Fall übertragen. Dazu bezeichne (für $i = 0, 1,\dots, n$) Δ_i die der Ecke x_i gegenüberliegende Seite von Δ, m_i den Mittelpunkt der Umsphäre von Δ_i, A_i den von Δ_i aufgespannten euklidischen Unterraum von $\mathfrak{E}$ und h_i den Fusspunkt der durch x_i gehenden Höhe.

Satz 3. *Für* $i = 0,1, \dots, n$ *ist* $F \cap A_i$ *die* $(n$-$2)$-*dimensionale Sphäre mit dem Mittelpunkt*

$$m_i' = x_i' + \frac{1}{n}(h_i - m_i) \tag{13}$$

und dem Radius

$$r_i' = \frac{1}{n} d(h_i, m_i). \tag{14}$$

---

[1]) In einem reellen euklidischen Raum gibt es zu jedem n- Simplex genau eine Umsphäre, d.h. eine $(n$-$1)$- dimensionale Sphäre, die die $n + 1$ nicht in einem $(n$-$1)$- dimensionalen Unterraum liegenden Ecken des Simplexes enthält.

(Wie im 2-dimensionalen Fall hängt also der Durchschnitt der Feuerbachsphäre mit einer «Seite» des Simplexes nur von dieser Seite und dem in ihr liegenden Höhenfusspunkt ab).

Beweis: Es genügt zu zeigen

$$\left[m'\underset{m_i}{,}x\right] = 0 \tag{15}$$

für alle $x \in A_i$. Beachten wir

$$x_i' = \left(-\frac{1}{n}\right)_s x_i, \tag{16}$$

so ergibt sich aus (11) und (13), über s gerechnet:

$$m' - m_i' = \left(-\frac{1}{n}\right)(m - m_i) + \left(-\frac{1}{n}\right)(x_i - h_i). \tag{17}$$

Aus der Definition von h_i als Höhenfusspunkt folgt

$$0 = \left[x_i\underset{h_i}{,}y\right] = [x_i - h_i, y - h_i] \tag{18}$$

für alle $y \in A_i$. Die allgemeinen Sätze über Durchschnitte von Sphären und euklidischen Unterräumen liefern

$$0 = \left[m\underset{m_i}{,}y\right] = [m - m_i, y - m_i] \tag{19}$$

für alle $y \in A_i$. Da nun mit x auch $x - m_i' + h_i$ und $x - m_i' + m_i$ in A_i liegen, erhalten wir aus (17), (18) und (19)

$$[m' - m_i', x - m_i'] = 0, \tag{20}$$

und das ist die vom Aufpunkt unabhängige Form der Behauptung (15).

Spezialisieren wir auf den Fall $n = 2$, so haben wir

$$m_i = x_i' \tag{21}$$

und damit

$$m_i' = \frac{1}{2}x_i' + \frac{1}{2}h_i, \tag{22}$$

sowie

$$r_i' = \frac{1}{2}d(h_i, x_i'), \tag{23}$$

daraus ergibt sich unmittelbar, dass der Feuerbachkreis durch die Höhenfusspunkte geht. Präziser kann man formulieren: Im Fall $n = 2$ ist die Verbindungsstrecke von h_i und x_i' ein Durchmesser von $F \cap A_i$. Wann das auch für höhere Dimensionen gilt, werden wir in Satz 5 charakterisieren.

Für das weitere Vorgehen ist der folgende allgemeine Satz fundamental.

Satz 4. *Sei S eine von der Umsphäre von Δ verschiedene $(n-1)$-dimensionale Sphäre in $\mathfrak{E}$ mit Mittelpunkt m' und Radius r'. Dann gibt es genau einen Punkt z und dazu genau eine positive reelle Zahl α mit*

$$\alpha \underset{z}{\cdot} x_i \in S \tag{24}$$

für $i = 0,1,\ldots,n$.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass das Gleichungssystem

$$d\left(\alpha \underset{z}{\cdot} x_i, m'\right) = r' \tag{25}$$

für die Unbekannten α und z genau eine Lösung mit $\alpha > 0$ hat. Dazu rechnen wir über m' und schreiben das System (25) mit Hilfe von (8) um in

$$[\alpha x_i + (1-\alpha)z, \alpha x_i + (1-\alpha)z] = r'^2 \tag{26}$$

d.h.

$$\alpha^2 [x_i, x_i] + 2\alpha (1-\alpha) [x_i, z] + (1-\alpha)^2 [z, z] = r'^2 \tag{27}$$

für $i = 0,1,\ldots,n$. Daraus erhält man zunächst

$$\alpha^2 [x_i, x_i] + 2\alpha (1-\alpha) [x_i, z] = \alpha^2 [x_0, x_0] + 2\alpha (1-\alpha) [x_0, z]. \tag{28}$$

Da wir ein positives α suchen, können wir unbesorgt durch α^2 dividieren und mit Hilfe von quadratischer Ergänzung kommen wir auf

$$\left[x_i - \frac{\alpha-1}{\alpha} z, x_i - \frac{\alpha-1}{\alpha} z\right] = \left[x_0 - \frac{\alpha-1}{\alpha} z, x_0 - \frac{\alpha-1}{\alpha} z\right] \tag{29}$$

d.h.

$$d\left(x_i, \frac{\alpha-1}{\alpha} z\right) = d\left(x_0, \frac{\alpha-1}{\alpha} z\right) \tag{30}$$

für $i = 0,1,\ldots,n$. Daraus folgt aber unmittelbar

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} \underset{m'}{\cdot} z = m, \tag{31}$$

wobei m wie oben den Mittelpunkt der Umsphäre von Δ bezeichnet.
Wäre nun eine Lösung mit $\alpha = 1$ möglich, so würde aus (25) folgen:

$$d(x_i, m') = r', \tag{32}$$

für $i = 0,1,2,\ldots,n$. Das bedeutet aber, dass S im Widerspruch zur Voraussetzung die Umsphäre von Δ wäre.
Also können wir (31) umformen zu

$$z = \frac{\alpha}{\alpha-1} \underset{m'}{\cdot} m. \tag{33}$$

Setzen wir das in (25) ein, so erhalten wir

$$r' = d(\alpha x_i - \alpha m, m') = |\alpha|\, d(x_i - m, m') = \alpha r, \tag{34}$$

weil wir ein positives α suchen; dabei bezeichnet r wie oben den Radius der Umsphäre von Δ. Damit ist α eindeutig bestimmt:

$$\alpha = \frac{r'}{r} \tag{35}$$

und aus (33) folgt

$$z = \frac{r'}{r' - r} \underset{m'}{\cdot} m \,. \tag{36}$$

Dass (35) und (36) wirklich eine Lösung von (25) liefern, bestätigt man durch Einsetzen. |

Ist S die Feuerbachsphäre von Δ, so nennen wir den durch Satz 4 bestimmten Punkt $f = z$ den Feuerbachpunkt von Δ. Wir werden in §4 zeigen, dass wir den Feuerbachpunkt eines Simplexes als verallgemeinerten Höhenschnittpunkt in dem in der Einleitung beschriebenen Sinn auffassen können. Für den Feuerbachpunkt f gilt nach (11), (12) und (36)

$$f = \frac{1}{1-n} \underset{m'}{\cdot} m = \frac{2}{1-n} \underset{s}{\cdot} m = \frac{n+1}{n-1} \underset{m}{\cdot} s \tag{37}$$

und das zugehörige α ergibt sich nach (12) und (35) zu (38)

$$\alpha = \frac{1}{n} \,. \tag{38}$$

Spezialisieren wir wieder auf den Fall $n = 2$, so haben wir

$$f = 3 \underset{m}{\cdot} s \,, \tag{39}$$

d.h. f ist der Höhenschnittpunkt h und

$$\alpha = \frac{1}{2} \,. \tag{40}$$

Satz 4 liefert dann die im Satz vom Feuerbachschen Kreis (Satz 1) enthaltene Aussage, dass die Punkte der Form $1/2 \underset{h}{\cdot} x_i$ für $i = 0,1,2$ auf dem Feuerbachkreis liegen.

Nun können wir das im Anschluss an Satz 3 angekündigte Ergebnis formulieren.

Satz 5. *Die Verbindungsstrecke von h_i und x_i' ist genau dann ein Durchmesser von $F \cap A_i$, wenn der Feuerbachpunkt f von Δ auf der durch x_i gehenden Höhe von Δ liegt.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $h_i \neq x_i'$. Nach (13) ist hierbei die Verbindungsstrecke von h_i und x_i' genau dann ein Durchmesser von $F \cap A_i$, wenn gilt

$$h_i = \frac{1}{1-n} \underset{m_i'}{\cdot} m_i \,; \tag{41}$$

die Behauptung ergibt sich nun aus einem Vergleich von (37) und (41).

Im Fall $h_i = x_i'$ besagt die Behauptung (vergl. (14)):

$$r_i' = d(h_i, m_i) = 0 \tag{42}$$

gilt genau dann, wenn f auf der durch x_i gehenden Höhe H_i von Δ liegt. Nun besagt aber die Voraussetzung $h_i = x_i'$, dass der Schwerpunkt s von Δ auf H_i liegt, und (42) gilt genau dann, wenn der Mittelpunkt m der Umsphäre von Δ auf H_i liegt. Zusammen mit (37) liefert das die Behauptung. |

§ 4. Vergleich von Feuerbachpunkt und Höhenschnittpunkt

Dazu geben wir zunächst ein Kriterium für die Existenz eines Höhenschnittpunktes im Fall $n > 2$ an.

Lemma. Es sei $n \geq 3$. Hat Δ einen Höhenschnittpunkt, so ist jedes h_i Höhenschnittpunkt von Δ_i; ist eines der h_i Höhenschnittpunkt von Δ_i, so hat Δ einen Höhenschnittpunkt.

Beweis: Die eine Richtung ist klar.
Zum Beweis der Umkehrung rechnen wir über x_0.

Dann ist

$$[h_o, x_j - x_k] = 0 \tag{43}$$

d.h.

$$[h_o, x_j] = [h_o, x_k] \tag{44}$$

für $1 \leq j, k \leq n$, bzw. speziell

$$[h_o, x_1] = [h_o, x_k] \tag{45}$$

für $1 \leq k \leq n$. Ist h_o nun auch Höhenschnittpunkt von Δ_o, so gilt darüberhinaus

$$[x_i - h_o, x_j - x_k] = 0, \tag{46}$$

d.h. unter Berücksichtigung von (43)

$$[x_i, x_j] = [x_i, x_k] \tag{47}$$

für $1 \leq i, j, k \leq n$, $j \neq i \neq k$. Damit haben wir aber

$$\left[x_i - \frac{[x_1, x_2]}{[h_o, x_1]} h_o, x_j\right] = 0 \tag{48}$$

für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, d.h. $[x_1, x_2]/[h_o, x_1]\, h_o$ ist Höhenschnittpunkt von Δ.[2]).

Damit können wir nun den Hauptsatz dieser Arbeit beweisen.

Satz 6. *Besitzt Δ einen Höhenschnittpunkt, so ist dies der Feuerbachpunkt von Δ.*

Beweis: Durch Induktion nach der Dimension von Δ. Der Induktionsanfang bei $n = 2$ ergibt sich aus den Bemerkungen nach Satz 4.

[2]) Es ist $[h_o, x_1] \neq 0$, da sonst wegen (45) $h_o = x_o$ wäre.

Zum Schluss von $n-1$ auf n bemerken wir zunächst, dass aus der Induktionsvoraussetzung, dem vorstehenden Lemma, (37) und (13) für $i = 0,1,\ldots, n$ die Gleichung (41) folgt, die – wie im Beweis zu Satz 5 ausgeführt wurde – besagt, dass der Feuerbachpunkt auf der Höhe durch x_i liegt. Da das für $i = 0,1,\ldots, n$ gilt, ist der Feuerbachpunkt der Höhenschnittpunkt. |

Das obige Lemma erlaubt noch andere Anwendungen, z. B. eine interessante Charakterisierung regulärer Simplizes.

Folgerung. Ein n-Simplex $n \geq 2$ ist genau dann regulär, wenn sein Schwerpunkt gleichzeitig Höhenschnittpunkt ist.

Beweis: Bei einem regulären Simplex fallen Schwerpunkt und der dann immer existierende Höhenschnittpunkt zusammen. Die Umkehrung ergibt sich durch einen Induktionsschluss, weil aus dem Zusammenfallen von s und h mit Hilfe des Lemmas folgt:

$$h_i = x_i' \tag{49}$$

für $i = 0,1,\ldots, n$. Der Induktionsanfang in zweidimensionalen Fall ist klar. |

Zum Abschluss können wir unsere Überlegungen zusammenfassen.

Falls Δ einen Höhenschnittpunkt h besitzt, gilt erstens

$$h = \frac{n+1}{n-1} \cdot s - \frac{2}{n-1} m, \tag{50}$$

d. h. insbesondere, dass h im Falle $s \neq m$ auf der Verbindungsgeraden von s und m, der «Eulerschen Geraden» von Δ liegt und dass der Schwerpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der Umsphäre im Verhältnis $2:(n-1)$ teilt, sowie zweitens

$$\frac{1}{n} \cdot_h x_i \in F \tag{51}$$

für $i = 0,1,\ldots, n$.

Jedes Simplex der Dimension ≥ 2 hat einen Feuerbachpunkt f, für den zu (50) und (51) analoge Beziehungen gelten und der im Falle der Existenz eines Höhenschnittpunktes mit diesem zusammenfällt.

Rudolf Fritsch, Universität Konstanz

LITERATUR

[1] WERNER BOS, *Über die Kategorien der affinen und euklidischen Räume*, Seminarmanuskript, Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik 1973.

[2] KARL WILHELM FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*, Riegel und Wiessner, Nürnberg 1822.

[3] RUDOLF FRITSCH, *Zum Feuerbachschen Kreis, Antrittsvorlesung*, Konstanzer Universitätsreden 72, Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz Universitätsverlag 1975.