Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

on $\bar{G}$; moreover as $0 \leq F < 1$ there is (at least) one point in $\bar{G}$ where F has its maximum value. By the usual procedure, in view of $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, a maximum satisfies

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} (= \lambda) \ . \tag{6}$$

In G we have

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{\alpha_1 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1}{\alpha_1^2} = F\,(\cot \alpha_1 - \alpha_1^{-1}) \ ,$$

and, as $F \neq 0$, (6) implies

$$\cot\alpha_1 - \alpha_1^{-1} = \cot\alpha_2 - \alpha_2^{-1} = \cot\alpha_3 - \alpha_3^{-1} \ . \tag{7}$$

For $f = \cot\alpha - \alpha^{-1}$ we obtain $f' = -\sin^{-2}\alpha + \alpha^{-2} < 0$; f is therefore a decreasing function of α (we have $0 > f > -\infty$); hence (7) implies

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ (= \pi/3) \ . \tag{8}$$

in this point we have $F = k$.

We must verify whether larger values appear on the boundary of $\bar{G}$. Between P_2 and P_3 yields

$$F = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_3}, \ \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

and by an argumentation analogous to the former, but now with two factors instead of three, it follows that for the maximum on P_2P_3 we have $\alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$ and $F = 4/\pi^2$, that is less than k. Hence $F \leq k$ on $\bar{G}$, which concludes the proof.

O. Bottema, Delft

REFERENCES

[1] P. Yff, *An analogue of the Brocard points*, Amer. Math. Monthly *70*, 500 (1963).
[2] Faruk Abi-Khuzam, *Proof of Yff's Conjecture on the Brocard Angle of a Triangle*, El. Math. *29* 141–142 (1974).

Aufgaben

Aufgabe 733. Let n be a positive integer ≥ 2. Let L be a line which intersects the $(n-1)$-dimensional hyperplanes containing the $(n-1)$-dimensional faces of a given n-dimensional simplex of vertices A_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ in the uniquely determined points B_i. Prove that the n-dimensional volume of the convex hull of the midpoints of $\overline{A_iB_i}$ is zero. This extends the known results for $n = 2, 3$ for which the midpoints are collinear and coplanar, respectively.

M.S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

Lösung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir A_{n+1} als Nullpunkt und $A_1, \ldots, A_n$ als Einheitspunkte eines affinen Koordinatensystems: $A_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $A_n = (0, \ldots, 0, 1)$, $A_{n+1} = (0, \ldots, 0)$. Dann lauten die $n+1$ Gleichungen der Seitenhyperebenen des gegebenen Simplexes

$$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0, x_1 + \ldots + x_n = 1 .$$

Die Gerade L habe die Vektordarstellung

$$L = \{(u_1, \ldots, u_n) + t(v_1, \ldots, v_n) \mid t \in \boldsymbol{R}\} .$$

Wegen der geforderten Existenz und Eindeutigkeit der Punkte B_i gilt $v_1 \neq 0, \ldots, v_n \neq 0$, $v_1 + \ldots + v_n \neq 0$, und es ist dann

$$B_i = (u_1, \ldots, u_n) - \frac{u_i}{v_i}(v_1, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

$$B_{n+1} = (u_1, \ldots, u_n) + \frac{1 - (u_1 + \ldots + u_n)}{v_1 + \ldots + v_n}(v_1, \ldots, v_n) .$$

Es zeigt sich nun, dass

$$v_1(A_1 + B_1) + \ldots + v_n(A_n + B_n) = (v_1 + \ldots + v_n)(A_{n+1} + B_{n+1}) ,$$

und mit $A_1 + B_1, \ldots, A_{n+1} + B_{n+1}$ sind auch $(A_1 + B_1)/2, \ldots, (A_{n+1} + B_{n+1})/2$ linear abhängig, q.e.d.

I. Paasche, München, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 734. In einem ebenen Dreieck mit den Seiten a_i sei R der Umkreisradius und r der Inkreisradius. Man zeige, dass

$$\frac{9R}{r} - \frac{4r}{R} - \frac{2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)}{a_1 a_2 a_3} \geq 10$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

E. Braune, Linz, Donau, Österreich

Lösung (mit Verschärfung): Wegen $a_1 a_2 a_3 = 4Rrs$ ist die behauptete Ungleichung

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \leq 2s(9R^2 - 10Rr - 4r^2) . \tag{1}$$

In Nieuw Archief voor Wiskunde *22* (November 1974) erschien ein Beweis der Ungleichungen

$$4rs(5R - 4r) \leq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \leq 4Rs(2R - r) . \tag{2}$$

Darin ist im Gegensatz zu (1) auch eine untere Schranke für $\sum a_1^3$ gegeben worden. Da

$$2s(9R^2-10Rr-4r^2)-4Rs(2R-r)=2s(5R^2-8Rr-4r^2)$$
$$=2s(5R+2s)(R-2r)\geq 0\,,$$

ist ausserdem die obere Schranke in (2) wesentlich besser als die in (1). Vollständigkeitshalber geben wir hier einen Beweis für (2), der von dem im Nieuw Archief erschienenen verschieden ist. Man hat

$$\sum a_i^3=(a_1+a_2+a_3)^3-3(a_1+a_2+a_3)(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)+3a_1a_2a_3\,.$$

Wie in Aufgabe 678 (Elem. Math. *28* [1973], p. 131) leitet man daraus

$$\sum a_i^3=2s(s^2-6Rr-3r^2)$$

her, und durch Anwendung der von Steinig herrührenden Ungleichungen

$$16Rr-5r^2\leq s^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2 \tag{3}$$

erhält man (2). O. Bottema, Delft, Niederlande

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), G. Bercea (München, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Frischknecht (Berneck SG), J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD), H. Voss (Köln, BRD) und M. Vowe (Therwil BL).

Anmerkung: Verschiedene Einsender haben auf die Möglichkeit der oben dargestellten Verschärfung hingewiesen. I. Paasche weist auch auf die verwandte Aufgabe 291 in Mat. Vesnik 1974 hin, ferner darauf, dass analoge Abschätzungen auch für die Ausdrücke

$$\sum r_i^3=-12Rs^2+(4R+r)^3\,,\qquad \sum s_i^3=s(s^2-12Rr)\,,$$
$$\sum r_i^2=-2s^2+(4R+r)^2\,,\qquad \sum s_i^2=s^2-8Rr-2r^2\,,$$
$$\sum a_i^2=2(s^2-4Rr-r^2)$$

gewonnen werden können, weil allemal nur (3) bzw. noch schärfere solche Ungleichungen (vgl. O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen 1968, p. 51 [5.10]) wirksam werden. Hierbei bezeichnen r_i die Anradien und s_i die Berührstrecken.

Aufgabe 735. C bezeichne die Menge der komplexen Zahlen. Es sei $d\in C$ beliebig und φ die durch $\varphi(z):=(d-z)^{-1}$ erklärte Abbildung von $C\cup\{\infty\}$ in sich, wobei $\varphi(\infty)=0$ und $\varphi(d)=\infty$ gelte. Man finde notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der durch

$$b_1\in C\cup\{\infty\}\quad\text{beliebig};\quad b_{n+1}=\varphi(b_n)\quad(n\geq 1)$$

erklärten Folge von Elementen von $C\cup\{\infty\}$ und bestimme im Falle der Existenz $\lim_{n\to\infty} b_n$. J. Binz, Bern

Lösung: Die durch $z \to z' = \varphi(z) = (d-z)^{-1}$ gegebene Abbildung φ von $C \cup \{\infty\}$ auf sich hat die Fixpunkte $z_1 = [d + (d^2-4)^{1/2}]/2$, $z_2 = d - z_1$, die genau dann zusammenfallen ($z_1 = z_2 = d/2$), wenn $d = \pm 2$ ist. Konvergenz und Grenzwert der Folge $\{b_n\}$ sind klar, wenn b_1 gleich z_1 oder z_2 ist; sei im folgenden daher stets $b_1 \neq z_1, z_2$.

Wir gehen vermöge $z \to w = L(z) = (z - z_1)^{-1}$ von der z-Kugel zur w-Kugel über (und nützen die Bijektivität der durch L vermittelten Abbildung aus); dabei wird z' auf $w' = L(z')$ abgebildet und $L \circ \varphi \circ L^{-1}$ ist gegeben durch $w \to w' = (z_2/z_1)\, w - z_2$. Statt $\{b_n\}$ untersuchen wir $\{B_n\}$, wobei alle $B_n = L(b_n) \in C$ sind wegen $b_n \neq z_1$, was aus $b_1 \neq z_1$ induktiv folgt; natürlich ist

$$B_{n+1} = (z_2/z_1)\, B_n - z_2 \quad \text{für} \quad n \geq 1\,.$$

Ist $z_1 = z_2$, so sieht man daraus $B_{n+1} = B_1 - n z_2$; aus $z_1 z_2 = 1$ folgt $z_2 \neq 0$, also $B_n \to \infty$ und somit $b_n \to z_1$ für $n \to \infty$.

Ist $z_1 \neq z_2$, so sieht man induktiv aus der Rekursionsformal für die B_n mittels $z_1 z_2 = 1$, dass $B_{n+1} = (z_2/z_1)^n (B_1 - L(z_2)) + L(z_2)$. Ist $|z_2| < |z_1|$, so $B_n = L(b_n) \to L(z_2)$, also $b_n \to z_2$ bei $n \to \infty$; ist $|z_2| > |z_1|$, so ist $B_1 \neq L(z_2)$ wegen $b_1 \neq z_2$ und also $B_n \to \infty$, somit $b_n \to z_1$. Im Fall $|z_2| = |z_1|$ (beachte $z_2 \neq z_1$) liegt wegen $B_1 \neq L(z_2)$ keine Konvergenz vor.

Ergebnis: Ist $d = \pm 2$, so $b_n \to d/2$ unabhängig von b_1. Ist $d \neq \pm 2$, so gilt im Fall $|z_1| < |z_2|$ (bzw. $|z_2| < |z_1|$), dass $b_n \to z_1$ (bzw. $\to z_2$) unabhängig von b_1, solange nur $b_1 \neq z_2$ (bzw. $\neq z_1$); im Fall $|z_1| = |z_2|$ liegt nur in den beiden trivialen Fällen $b_1 = z_1$ und $b_1 = z_2$ Konvergenz vor.

Mit unserer Methode lässt sich völlig analog die allgemeinste linear-gebrochene Abbildung $\varphi(z) := (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc \neq 0$, $|a-d| + |b| + |c| > 0$ (d.h. nichtkonstant und von der Identität verschieden) behandeln; das Ergebnis ist qualitativ das gleiche wie im Spezialfall je nachdem, ob φ genau einen oder genau zwei verschiedene Fixpunkte besitzt.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Kappus (Rodersdorf SO), P. Krauchthaler (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 736. Man beweise, dass für jedes nichtkonstante Polynom f mit ganzzahligen Koeffizienten die Reihensumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[f(n), \ldots, f(1)]}$$

existiert und irrational ist, wobei bei der Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[f(n), \ldots, f(1)]$ eventuelle Werte Null von f zu ignorieren sind.

P. Erdös, Budapest, Ungarn

Solution by the proposer: Assume first that $f(x)$ is not the product of linear factors with integer coefficients. Then by a well-known theorem of Nagell (for a sharper result see P. Erdös)

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} f(k)\right) > c\, n \log n$$

where $P(m)$ denotes the greatest prime factor of m.

Now we prove the following general theorem. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of integers. Let A_n be the least common multiple of a_i, $1 \leq i \leq n$. Assume

$$P(A_n)/n \to \infty . \tag{1}$$

Then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n}$ is irrational.

Assume $\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n}$. Then clearly $(A_n \mid A_{n+1})$

$$b\, A_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n+i}} \geq 1 . \tag{2}$$

We will now show that (2) is false, in fact we show

$$\liminf_{n=\infty} b A_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n+i}} = 0 . \tag{3}$$

To prove (3) denote by $u_1 < u_2 < \ldots$ the sequence of integers for which

$$P(a_{u_k}) > P\left(\prod_{n=1}^{u_k - 1} a_n\right) \quad \text{and} \quad P(a_{u_k})/u_k \to \infty . \tag{4}$$

In other words, the u_k are the integers for which a_{u_k} is divisible by a large new prime. By (1) such a sequence exists. By the definition of the u_k, we have $P(a_{u_k}) = P\left(\prod_{n=1}^{u_{k+1}-1} a_k\right)$. Thus by (1)

$$P(a_{u_k})/u_{k+1} \to \infty . \tag{5}$$

Now it is easy to see that (5) implies (3). Observe that if $n < u_r < u_{r+1} < \ldots < u_{r+l} \leq m$, then

$$A_m \geq A_n \prod_{s=0}^{l} P(a_{u_{r+s}}) \cdot \tag{6}$$

Thus from (5) and (6) if $n = u_k - 1$

$$b\, A_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n+i}} \leq b\left(\frac{u_{k+1}}{P(a_{u_k})} + \frac{u_{k+2}}{P(a_{u_k})\, P(a_{u_{k+1}})} + \ldots\right)$$

$$= b \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u_{k+r}}{\prod_{j=1}^{r-1} P(a_{u_{k+j}})} < \varepsilon$$

for every $\varepsilon > 0$ if k is sufficiently large, which completes our proof.

If $f(x)$ is a product of linear factors, the proof is quite simple and is similar to the proof given here – it is almost identical with the proof if $f(x) = x$, which is an old theorem of mine ($\sum 1/B_n$ is irrational where B_n is the least common multiple of the integers $\leq n$).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. August 1976** an Dr. **H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91).

Aufgabe 757. Webb has shown (El. Math. *29* [1974], 1–5) that if p is a prime, k an integer, $k \geq 4$ and $p \nmid k$, and if there are integers x, y, z $(0 < x \leq y \leq z)$ such that

$$\frac{k}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \tag{*}$$

then $x < 2p/k$ unless either $k \mid 2p+1$ and $x = (2p+1)/k$, or $k \mid p+1$ and $x = 2(p+1)/k$. Show that this result is sharp, in the following sense: given an integer $k \geq 4$ and a real number ε, $0 < \varepsilon < 2$, one can find an arbitrarily large prime p with $p \nmid k$, and integers x, y, z $(0 < x < y < z)$ such that (*) holds and that $2 - \varepsilon < kx/p < 2$. (Note that this does not answer the question in Webb's paper, of how close to $2(p+1)/k$ the smallest value of x, among all solutions of (*), can be.)

J. Steinig, Geneva

Aufgabe 758. Sei a ganz, und p_n bezeichne die n-te Primzahl. Man zeige: $a \neq \pm 1$ genau dann, wenn es zu a ein reelles x gibt, so dass $L(a, x) := \liminf_{n \to \infty} \| x(p_n + a) \|$ positiv ist; hier ist $\|y\| := \operatorname{Min}(y - [y], 1 + [y] - y)$ für reelles y gesetzt und $[y]$ die grösste ganze Zahl $\leq y$. (Man benutze eventuell die Tatsache, dass für irrationales reelles z die Folge $(z p_n - [z p_n])_{n = 1, 2, \ldots}$ jeden Punkt des Intervalls $[0, 1]$ als Häufungspunkt besitzt.)

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 759. In einer Ebene sind drei Kreise gegeben. Deren 8 Schnittpunkte (imaginäre Kreispunkte inbegriffen) bestimmen ein Büschel von Kurven 3. Ordnung. Man zeige:

a) Der neunte Grundpunkt dieses Büschels ist der Punkt P gleicher Potenz in bezug auf die drei Kreise.

b) Die Tangente in P ist für jede Büschelkurve parallel zu deren reeller Asymptote.

c) Für jede Büschelkurve liegt der reelle Punkt der imaginären Asymptoten auf dem Kreis durch die Zentren der gegebenen Kreise.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 760. a) Im n-dimensionalen Würfel mit ganzzahliger Kantenlänge m:

$$W_m := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq m \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

bildet man für $s = 1, \ldots, r\ (r \leq m)$ aus

$$J_{is} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq i,\ 0 \leq x_i \leq s-1 \text{ oder } s \leq x_i \leq m\}$$

die Mengen

$$A_s := J_{1s} \times J_{2s} \times \ldots \times J_{ns}$$

und betrachtet den Restkörper

$$R_{m,r} := W_m \setminus \bigcup_{s=1}^{r} A_s\ .$$

Man berechne den Volumeninhalt dieses Restkörpers und formuliere das Resultat mit Hilfe der Stirling-Zahlen 2. Art:

$$S_{k,r} := \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^k\ .$$

b) n Urnen enthalten je m mit den Nummern $1, \ldots, m$ numerierte Lose. Aus jeder Urne werde genau ein Los gezogen. Welches kombinatorische Abzählproblem wird durch das Resultat von a) gelöst? R. Wyss, Flumenthal SO

Literaturüberschau

Giuseppe Peano. Von HUBERT C. KENNEDY. 31 Seiten. Fr. 14.50. El. Math. Beiheft Nr. 14. Birkhäuser Verlag, Basel 1974.

Es ist sehr erfreulich, dass mit Heft Nr. 13 (über Emmy Noether) und mit dem vorliegenden Heft Nr. 14 die Reihe der «Kurzen Mathematiker-Biographien» nach längerem Unterbruch wieder fortgesetzt wird! – Wer an der Entwicklung der Mathematik interessiert ist, greift stets sehr gerne zu diesen Heften und wird es zu schätzen wissen, durch die ansprechende Darstellung von H. C. Kennedy Näheres über das Leben und vor allem auch über die Arbeiten von Giuseppe Peano zu erfahren: Es sind hier nicht nur die ‹Axiome von Peano› zu erwähnen; der Leser erfährt auch von seinen Büchern über Differential- und Integralrechnung (‹ein mustergültiges Beispiel präziser Darstellung und strenger Schlussweise›), über die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung und über die Ausdehnungslehre von Grassmann. Recht ausführlich werden dann seine verschiedenen Arbeiten zur Logik und zu den Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie geschildert und seine – vor allem aus diesen Arbeiten hervorgegangenen – Kontakte mit andern Gelehrten. Und zum Schluss vernimmt man – dies dürfte für manchen Leser eine Überraschung bedeuten – von seinen Bemühungen, eine internationale, allgemein verständliche Hilfssprache der Wissenschaften zu schaffen, ein ‹Latino sine flexione›. – Auf S. 16 wäre noch eine Korrektur vorzunehmen: Es handelt sich wohl nicht um die ‹Erhaltung des Trägheitsmomentes›, sondern um die ‹Erhaltung des Drehimpulses› (Peano hat sich nämlich auch mit dem Problem der ‹fallenden Katze› beschäftigt!). R. INEICHEN

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Zehnjahres-Register. 83 Seiten. Dümmler, Bonn 1974.

Das vorliegende Zehnjahres-Register der Zeitschrift MNU umfasst die Jahrgänge 16 bis 25 (1963/64 bis 1972); sein wohl wichtigster Teil ist das Sachverzeichnis in Form eines Stichwortregisters. Anschliessend folgt ein Verzeichnis der Aufsätze, Berichte und Mitteilungen, welches als Autorenregister angelegt ist. Der dritte Teil ist ein Register der rezensierten Bücher, geordnet nach den Namen der Verfasser. Leider ist das vorangehende Fünfzehnjahres-Register der Jahrgänge 1 bis 15 vergriffen. H. WALSER