Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Analog zur Herleitung des Satzes 1 ist diese Kongruenz äquivalent zur Kongruenz $(xy^{-1})^2 \equiv q(\bmod p)$, und diese ist genau dann unlösbar, wenn q quadratischer Nichtrest von p ist.

Als Verallgemeinerung des Satzes 1 erhalten wir also den

Satz 2

Ist q quadratischer Nichtrest von p, so ist $[Z_p^2; \oplus, \odot_q]$ ein Galois-Feld $GF(p^2)$.

P. Hohler, Olten

LITERATUR

[1] M. JEGER, *Irreduzible Polynome als kombinatorische Figuren*, El. Math. *28* (1973), 86–92.

[2] E. TROST, Primzahlen, Birkhäuser Basel 1953.

Aufgaben

Aufgabe 741. In einem Dreieck ABC seien A', B', C' und A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte bzw. die Höhenfusspunkte der Seiten BC, CA, AB. In der Dreiecksebene seien noch ein Punkt P und die zu P symmetrischen Punkte P_a, P_b, P_c in bezug auf $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ gegeben. Man zeige, dass die Kreise mit den Durchmesserstrecken A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c und der Feuerbachsche Neunpunktekreis des Dreiecks ABC sich in einem Punkt schneiden. G. Bercea, München, BRD

Lösung: Es sei d der durch P gehende Durchmesser des Umkreises ω (Mittelpunkt M) von ΔABC und A^* der Fusspunkt des Lotes durch A auf d. Der Kreis mit der Durchmesserstrecke AM geht durch A^*. Das Spiegelbild dieses Kreises in bezug auf $B'C'$ ist der Neunpunktekreis ν des Dreiecks ABC, d.h. der Umkreis von $\Delta A'B'C'$. Deshalb liegt das Spiegelbild D von A^* an $B'C'$ auf ν. Daraus folgt, dass die Spiegelbilder B^* und C^* von D an $A'C'$ bzw. $A'B'$ in einer Geraden liegen mit A^*. Diese Gerade geht bekanntlich durch den Höhenschnittpunkt von $\Delta A'B'C'$, d.h. also durch M. Es liegen B^* und C^* deshalb auf d. Man hat offenbar: $C'A^* = C'D = C'B^*$. Wird die Mitte der Strecke A^*B^* mit E bezeichnet, so ist folglich $C'E \perp A^*B^*$; deshalb: $C'E \parallel AA^*$. Dann ist auch $BB^* \parallel AA^*$, also $BB^* \perp d$. Ebenso gilt: $CC^* \perp d$. Weil $A^*D \perp BC$, $B^*D \perp CA$ und $C^*D \perp AB$, folgert man aus dem Obigen, dass D der Orthopol der Geraden d ist in bezug auf ΔABC. Der Kreis mit der Durchmesserstrecke A_1P_a ist offenbar das Spiegelbild an $B'C'$ des durch A^* hindurchgehenden Kreises mit der Durchmesserstrecke AP. Der zuerst genannte Kreis geht deshalb durch D. Dasselbe gilt für die Kreise mit den Durchmesserstrecken B_1P_b bzw. C_1P_c.

Bemerkungen: 1. Die obige Lösung enthält zugleich einen Beweis für den bekannten Satz: Der geometrische Ort der Orthopole der Durchmesser des Umkreises ist der Neunpunktekreis.

2. Man zeigt unschwer, dass auch der Fusspunktekreis von P bezüglich ΔABC durch P geht.

O. P. Lossers, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten O. Bottema (Delft, Niederlande), J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), K. Grün (Linz, Österreich), L. Kuipers (Mollens VS) und J. Quoniam (St-Etienne, Frankreich).

Aufgabe 742. Ein Ring R mit Einselement 1 heisst lokal, falls er ein Ideal I besitzt derart, dass $R \setminus I$ die Einheitengruppe von R ist. Bekanntlich ist dann der Quotientenring R/I ein Körper. Man beweise: Ist R ein lokaler Ring und hat R/I eine von 2 verschiedene Charakteristik, so gibt es genau ein Element a von R mit $a \neq 1$ und $a^2 = 1$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Lösung: Für jedes Element z von R wird die Restklasse von z modulo I mit $[z]$ bezeichnet. Wegen $\mathrm{char}(R/I) \neq 2$ ist $[1] + [1] \neq [0]$, also $1 \neq -1$.

1. Für $z \in R \setminus I$ ist $[z] \neq [0]$. Da R/I ein Körper ist, so folgt $[z + z] = [z] + [z] = [z]([1] + [1]) \neq [0]$, also $z + z \in R \setminus I$.

2. Wir nehmen an, es gebe ein $x \in R$ mit $x^2 = 1$, $x \neq 1$, $x \neq -1$. Es folgt $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = 0$, also sind $x + 1$ und $x - 1$ nicht Einheiten von R. Somit gilt $x + 1 \in I$, $x - 1 \in I$, also $x + x = (x + 1) + (x - 1) \in I$. Andererseits ist x wegen $x^2 = 1$ eine Einheit von R, also $x \in R \setminus I$ und folglich wegen 1) $x + x \in R \setminus I$. Das ist ein Widerspruch.

Aus 2. folgt, dass 1 und -1 die einzigen Lösungen von $x^2 = 1$ sind. Wegen $1 \neq -1$ folgt daraus die Behauptung.

Chr. A. Meyer, Bern

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen BE) und O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande).

Aufgabe 743. Am ebenen Dreieck mit Inkreisradius r, Umkreisradius R und Umfang $2\,s$ gibt es beliebig viele richtige Aussagen der Form

$$0 \leq \frac{R\,r - 2\,r^2}{1} \leq \frac{s^2 - 27\,r^2}{A} \leq \frac{2\,s^2 - 27\,R\,r}{B} \leq \frac{R^2 - 2\,R\,r}{C}$$

$$\leq \frac{R^2 - 4\,r^2}{D} \leq \frac{27\,R^2 - 4\,s^2}{E}$$

mit positiven reellen Zahlen A bis E. Man berechne der Reihe nach die maximalen derartigen A, B, C, D, E.

I. Paasche, München, BRD

Lösung: Für jedes Dreieck Δ setzen wir $x = R/r$, $y = s/r$. Dann ist immer $x \geqq 2$ mit GGF (Gleichheit im gleichseitigen Fall und nur dann; [1], 5.1). Ebenso ist $y^2 \geqq 27$ mit GGF ([1], 5.11). Es ist klar, dass x alle Werte $\geqq 2$ und y^2 alle Werte $\geqq 27$ annehmen können. Aus [1], 13.8 folgt, dass einem geordneten Paar (x, y) von positiven Zahlen mit $x \geqq 2$ dann und nur dann in der obigen Weise ein Dreieck entspricht, wenn folgende beiden Ungleichungen gelten:

$$y^2 \geqq 2\,x^2 + 10\,x - 1 - 2\,(x - 2)\sqrt{x^2 - 2\,x} \qquad (\alpha)$$

$$y^2 \leqq 2\,x^2 + 10\,x - 1 + 2\,(x - 2)\sqrt{x^2 - 2\,x}. \qquad (\beta)$$

Gleichheit in einer dieser Ungleichungen bedeutet, dass Δ gleichschenklig ist, Gleichheit in beiden, dass Δ gleichseitig ist.

In [2] ist bewiesen worden, dass die Behauptungen Blundons aus [1], 5.9 falsch sind. Wir müssen daher auf die schwierigeren Ungleichungen von [1], 5.10 zurückgreifen. Wir kombinieren sie mit (α) und (β) und bekommen folgende logischen Äquivalenzen:

$$y^2 \geqq f(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 1 - 2(x-2)\sqrt{x^2 - 2x} \geqq f(x) \tag{γ}$$

$$y^2 \leqq f(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 1 + 2(x-2)\sqrt{x^2 - 2x} \leqq f(x). \tag{δ}$$

Hier und überall im folgenden muss man die Klausel «für alle Δ» hinzudenken.

Einzeln lauten die sechs Ungleichungen der Aufgabe:

$$\text{(I)}\quad 0 \leqq x - 2, \qquad\qquad \text{(II)}\quad x - 2 \leqq \frac{y^2 - 27}{A},$$

$$\text{(III)}\quad \frac{y^2 - 27}{A} \leqq \frac{2y^2 - 27x}{B}, \qquad\qquad \text{(IV)}\quad \frac{2y^2 - 27x}{B} \leqq \frac{x^2 - 2x}{C},$$

$$\text{(V)}\quad \frac{x^2 - 2x}{C} \leqq \frac{x^2 - 4}{D}, \qquad\qquad \text{(VI)}\quad \frac{x^2 - 4}{D} \leqq \frac{27x^2 - 4y^2}{E}.$$

Aus der Einleitung ist ersichtlich, dass alle sechs Ungleichungen trivialerweise richtig sind mit «$=$» im gleichseitigen Fall. Über (I) haben wir oben schon alles gesagt. Wir wollen im folgenden zeigen, dass auch die fünf übrigen alle wahr sind für passend kleine Werte von A, B/A, C/B, D/C, E/D. Es wird sich zeigen, dass (II), (III), (IV), (V) im maximalen Fall mit GGF gelten, aber, überraschend genug, nicht (VI).

(II) lässt sich als $y^2 \geqq Ax + (27 - 2A)$ schreiben. Wegen (γ) kann man ebensogut

$$(x-2)(2x + 14 - A) \geqq 2(x-2)\sqrt{x^2 - 2x} \tag{1}$$

betrachten. Wenn $x > 2$ gilt, kann man (1) durch $x - 2$ teilen und bekommt so

$$2x + 14 - A \geqq 2\sqrt{x^2 - 2x}. \tag{2}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt (2) auch noch für $x = 2$. Da (2) $\Rightarrow$ (1) trivial ist, hat man daher (1) $\Leftrightarrow$ (2). In (2) nehmen wir $x = 2$ und bekommen $A \leqq 18$ als eine notwendige Bedingung für (II). Wir setzen daher nun $A \leqq 18$ voraus. Wir dürfen dann ersichtlich (2) quadrieren. So bekommen wir die zu (2) äquivalente Ungleichung

$$(16 - A)x + (7 - {}^1\!/_2 A)^2 \geqq 0. \tag{3}$$

Für $16 < A \leqq 18$ ist (3) falsch, wenn x gross genug ist, für $A \leqq 16$ dagegen wahr. Folglich ist max $A = 16$. Mit $A = 16$ lautet (3): $1 > 0$. Daher gilt auch (2) mit «$>$», und man schliesst, dass (II) mit GGF gilt.

Mit $A = 16$ kann man (III) als

$$(32 - B)y^2 \geqq 27(16x - B) \tag{4}$$

schreiben. Für $B = 32$ lässt sich (4) zu $x \leqq 2$ reduzieren und ist daher falsch. (4) ist dann auch falsch für grössere Werte von B. Wir setzen daher nun $B < 32$ voraus.

Bei (γ) werden wir nun (4) durch

$$(32 - B)\,x^2 - (56 + 5B)\,x + 14B - 16 \geqq (32 - B)\,(x - 2)\sqrt{x^2 - 2\,x} \tag{5}$$

ersetzen. Wir teilen durch $x - 2$ und sehen wie oben ein, dass (5) mit

$$(32 - B)\,x + (8 - 7B) \geqq (32 - B)\sqrt{x^2 - 2\,x} \tag{6}$$

äquivalent ist. $x = 2$ in (6) liefert die kräftigere notwendige Bedingung $B \leqq 8$ für (III). Unter Voraussetzung von $B \leqq 8$ quadrieren wir (6), reduzieren und finden

$$(32 - B)\,(80 - 16B)\,x + (8 - 7B)^2 \geqq 0\,. \tag{7}$$

Ganz wie oben schliesst man nun, dass max $B = 5$ ist, und dass (III) für $B = 5$ mit GGF gilt.

Mit $B = 5$ reduzieren wir (IV) zu

$$2\,Cy^2 \leqq 5\,x^2 + (27C - 10)\,x\,. \tag{8}$$

Wir benutzen diesmal (δ), reduzieren, teilen durch $x - 2$ und bekommen die mit (8) äquivalente Ungleichung

$$(5 - 4C)\,x - C \geqq 4C\sqrt{x^2 - 2\,x}\,. \tag{9}$$

$x = 2$ gibt die notwendige Bedingung $C \leqq 10/9$ für (IV). Unter Voraussetzung dieser Bedingung quadrieren wir (9) und bekommen die mit (9) äquivalente Ungleichung

$$(25 - 40C)\,x^2 + (40C^2 - 10C)\,x + C^2 \geqq 0\,. \tag{10}$$

Wenn $C > {}^5/_8$ ist, gilt (10) nicht für genügend grosse x. Wir können daher unsere notwendige Bedingung zu $C \leqq {}^5/_8$ verschärfen. Wir schreiben nun (10) um zu

$$(x - 2)\,((25 - 40C)\,x + 40\,(1 - C)\,({}^5/_4 - C)) + (9C - 10)^2 \geqq 0\,. \tag{11}$$

Für $C \leqq {}^5/_8$ ist (11) ersichtlich richtig mit «$>$». Daher ist max $C = {}^5/_8$, und (IV) gilt im maximalen Fall mit GGF.

Mit $C = {}^5/_8$ lässt sich (V) schreiben als

$$(x - 2)\big((5 - 8D)\,x + 10)\big) \geqq 0\,.$$

Hieraus sieht man, dass (auch) max $D = {}^5/_8$, und dass (V) im maximalen Fall gilt mit GGF.

Mit $D = {}^5/_8$ schreiben wir (VI) als

$$20\,y^2 \leqq (135 - 8E)\,x^2 + 32E\,. \tag{12}$$

Um die unvermeidlichen Schwierigkeiten etwas zu vermindern, setzen wir $F = 8E$ und $z = x - 2$. Wir verwenden nun (δ), unterdrücken den gemeinsamen Faktor z (wie mehrmals früher) und bekommen so die zu (12) äquivalente Ungleichung

$$(95 - F)\,z + 4\,(45 - F) \geqq 40\sqrt{z^2 + 2\,z}\,. \tag{13}$$

$z = 0$ liefert die notwendige Bedingung $F \leqq 45$ für (VI). Wir setzen $F \leqq 45$ voraus, quadrieren (13), reduzieren und finden die zu (13) äquivalente Ungleichung

$$(F^2 - 190F + 7425)\,z^2 + 8\,(F^2 - 140\,F + 3875)\,z + 16\,(F - 45)^2 \geqq 0\,. \tag{14}$$

Da $F \leqq 45$ ist, ist $F^2 - 190F + 7425 = (55 - F)(135 - F) > 0$. Das Polynom $P_F(z)$ links in (14) ist also vom Grad 2 mit positivem Leitkoeffizienten. Die Diskriminante von $P_F(z)$ ist

$$d_F = 51200\,(F^2 - 40\,F - 25)\,.$$

Das Polynom $t^2 - 40t - 25$ hat die zwei Wurzeln $20 + 5\sqrt{17} \approx 40{,}6155$ und $20 - 5\sqrt{17} \approx -0{,}6155$. Für $0 < F < 20 + 5\sqrt{17}$ ist $d_F < 0$, und (14) und somit auch (VI) gelten. Wir nehmen dann $F = 20 + 5\sqrt{17}$. Dann ist $d_F = 0$. (14) und (VI) sind daher noch richtig, aber (14) ist eine Gleichung für

$$z \frac{-4\,(F^2 - 140\,F + 3875)}{F^2 - 190\,F + 7425} = \frac{5\sqrt{17} - 13}{16}\,.$$

Wir berechnen hierzu $x = z + 2$ und y^2 aus (12) mit «=». Wir bekommen

$$x = \frac{5\sqrt{17} + 19}{16}\,, \quad y^2 = \frac{37 + 9\sqrt{17}}{2}\,.$$

Für das zugehörige Paar (x, y) gilt (β) mit «=». Mit $E = (20 + 5\sqrt{17})/8$ gilt also (VI), und Gleichheit tritt ein für ein gleichschenkliges, nicht gleichseitiges Dreieck. Hieraus schliesst man sofort, dass

$$\max \mathrm{E} = \frac{20 + 5\sqrt{17}}{8}\,.$$

Zusammenfassung: Die der Reihe nach bestimmten maximalen Werte von A, B, C, D, E lauten 16, 5, 5/8, 5/8, $(20 + 5\sqrt{17})/8$.

Anmerkungen: Aus [1], (5.9) würde man fälschlicherweise $\max E = 35/8$ geschlossen haben, die anderen Ergebnisse wären aber richtig geworden.

LITERATUR

[1] O. Bottema et al., Geometric Inequalities. Groningen 1969.
[2] R. Frucht and M. S. Klamkin, On best quadratic triangle inequalities. Geometriae Dedicata *2* (1973), 341–348.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Teillösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 744. Es sei $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ die Folge aller Primzahlen, und für jedes natürliche n bezeichne q_n die kleinste Primzahl, welche kongruent 1 modulo p_n ist. Man zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty \text{ gilt.}$$

P. Erdös, Budapest, Ungarn

Lösung: Man setze $q(p) := \min\{n \mid n \equiv 1 \pmod{p},\ n \text{ prim}\}$
und hiermit

$$S(x) := \sum_{p \leq x} \frac{1}{q(p)}\,.$$

Es sei $h(t) \uparrow \infty$ und derart, dass

$$\sum_p \frac{1}{p h(p)} < \infty .$$

Dann ist

$$S(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ q(p) \leq p h(p)}} \frac{1}{q(p)} + \sum_{\substack{p \leq x \\ q(p) > p h(p)}} \frac{1}{q(p)} = : V(x) + W(x) .$$

Es ist

$$W(x) \leq \sum_p \frac{1}{p h(p)} .$$

Es sei $2 \leq z \leq y$. Dann ist

$$V(y, z) : = \sum_{\substack{z < p \leq y \\ q(p) \leq p h(p)}} \frac{1}{q(p)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{z < p \leq y \\ q(p) \leq p h(p) \\ q(p) = 1 + 2mp}} \frac{1}{1 + 2mp} \leq \sum_{m \leq h(y)} \frac{1}{m} \sum_{\substack{z < p \leq y \\ 1 + 2mp \ prim}} \frac{1}{p} .$$

Nach Erdös gilt (K. Prachar, Primzahlverteilung, Satz II. 4.5)

$$\pi(t; m) : = \sum_{\substack{p \leq t \\ 1 + 2mp \ prim}} 1 \leq K \frac{t}{(\log t)^2} \frac{m}{\varphi(m)} .$$

Die innere Summe ist daher

$$= \int_z^y \frac{d\pi(t; m)}{t} = \left[\frac{\pi(t, m)}{t} \right]_z^y + \int_z^y \frac{\pi(t; m)}{t^2} dt \leq L \frac{1}{\log z} \frac{m}{\varphi(m)}$$

mit einer absoluten Konstanten L.
Also ist

$$V(y, z) \leq M \frac{\log h(y)}{\log z} \quad \text{mit einer absoluten Konstanten } M.$$

Nun sei $2 = x_1 < \ldots < x_m < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Es sei $x \geqslant 3$ vorgegeben. Es sei n derart, dass $x_{n-1} < x \leq x_n$.
Dann ist

$$V(x) \leq V(x_{n+1}) = \sum_{m=1}^{n} V(x_{m+1}, x_m) \leq M \sum_{m=1}^{n} \frac{\log h(x_{m+1})}{\log x_m} .$$

Nun wähle man etwa

$$h(t) : = \log t \text{ und } x_m : = 2^{m^2}.$$

Dann folgt

$$V(x) \leq N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(m+1)}{m^2} \quad \text{mit einer absoluten Konstanten } N.$$

R. Warlimont, Regensburg, BRD

Eine weitere Lösung sandte D. Wolke (Clausthal-Zellerfeld, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Dezember 1976** an Dr. **H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91), Problem 764 A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 765. Es sei für reelle $x \geqq 2$

$$f^1(x) = f(x) = [\sqrt{x}], \quad f^k(x) = f^{k-1}(f(x)), \; k = 2, 3, \ldots$$

Man bestimme

$$n(x) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid f^k(x) = 1\}.$$

R. Wyss, Flumenthal SO

Aufgabe 766. Es sei P ein konvexes Polyeder des d-dimensionalen Raumes E^d und F eine $(d-1)$-dimensionale Seitenfläche von P mit der Flächennormalen $\boldsymbol{u}$. F heisse dominant, wenn $\pi_u(P) = \pi_u(F)$. Dabei bedeute π_u die Projektion in Richtung u. $D_d(P)$ bezeichne die Anzahl der dominanten Seitenflächen von P. Welche Werte kann $D_d(P)$ annehmen?

Ch. Meier, Bern

Aufgabe 767. Eine unendliche Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen heisse Irrationalitätsfolge (IF), wenn jede konvergente Reihe der Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} (t_i n_i)^{-1} \qquad (t_i \text{ ganz positiv}) \tag{1}$$

eine irrationale Zahl darstellt. Z.B. ist $\{2^{2^k}\}$ eine IF. Es ist zu zeigen: 1. Ist $\{n_k\}$ eine IF, so ist jede Reihe (1) konvergent. 2. Es gilt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, n_k^{1/k} = \infty$

P. Erdös, Budapest

Aufgabe 768. Es sei n eine zusammengesetzte natürliche Zahl. Man zeige, dass die Kongruenz

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} \tag{1}$$

dann und nur dann nur die triviale Lösung $x \equiv 1 \pmod{n}$ besitzt, wenn $(n-1, \varphi(n)) = 1$ (φ ist die Eulersche Funktion). Damit wird eine Frage von K. Szymiczek über Pseudoprimzahlen (bezüglich x) beantwortet.

Peter Kiss, Eger, Ungarn