# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

$$-\left(\log 2\right)^2\Big\} - \frac{1}{2}\log x + 2.$$

Letzteres ist für alle $x$ grösser als in Satz 2 behauptet.

Eine vernünftige Abschätzung nach oben scheint sich nicht so einfach zu ergeben. Für $d=1$ kann man $O(\sqrt{x})$ erhalten, aber nach [2] oder [3] gilt $d=(r,\sigma(r))>1$ für fast alle $r$. Direkte Anwendung der Abschätzung aus [5] ergibt wohl nur $O(x)$.

Heiko Harborth, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BROTHER A. BROUSSEAU, *Number Theory Tables* (San José, Calif. 1973).
[2] P. ERDÖS, *Über die Zahlen der Form $\sigma(n)$-$n$ und $n$-$\varphi(n)$*, Elem. Math. *28*, 83–86 (1973).
[3] H.-J. KANOLD, *Ein Satz über zahlentheoretische Funktionen*, Math. Nachr. *18*, 36–38 (1958).
[4] W. SIERPINSKI, *Elementary Theory of Numbers* (Warszawa 1964).
[5] E. WIRSING, *Bemerkung zu der Arbeit über vollkommene Zahlen*, Math. Ann. *137*, 316–318 (1959).

# Kleine Mitteilungen

## On Support Functions of Compact Convex Sets

The support function $h(K,.)$ of a compact convex set $K$ in $d$-dimensional euclidean space $E^d$ is defined by $h(K,u)=\sup\{<x,u> \mid x \in K\}$ for each $u \in E^d$, where $<.,.>$ denotes the ordinary inner product in $E^d$. A well known result in the basic theory of finite dimensional convexity is the following:

**Theorem.** *A positively (linear) homogeneous convex function $h$ on $E^d$ is the support function $h(K,.)$ of some compact convex set $K$.*

There are two proofs of this result in the literature, the first using directional derivatives of $h$ (see, for example, [1], [2]), the second using polar cones (the sketch in [4]) or, equivalently, conjugate functions [3].

What is somewhat surprising is that there is a third proof, which more directly and intuitively makes use of the convexity of the function $h$. Indeed, perhaps the most curious feature of this proof is that it seems not to have been found earlier.

The new proof can be outlined very simply. If we write

$$H^-(u)=\{x \in E^d \mid <x,u> \leqslant h(u)\}, \qquad H(u)=\{x \in E^d \mid <x,u> = h(u)\},$$

for each $u \in E^d$, then the set

$$K=\{x \in E^d \mid <x,u> \leqslant h(u) \text{ for all } u \in E^d\} = \bigcap\{H^-(u) \mid u \in E^d\}$$

is clearly compact and convex, though not obviously non-empty. So, since $K \subseteq H^{-}(u)$ for each $u \in E^d$, to prove that $h$ is the support function of $K$, it is enough to show that $K \cap H(u) \neq \emptyset$ for each $u \in E^d$. This we do by showing that $H^{-}(v_1) \cap \cdots \cap H^{-}(v_d) \cap H(u) \neq \emptyset$ for each choice of $v_1, \ldots, v_d \in E^d$, and then applying Helly's theorem in $H(u)$ to the family of sets $H^{-}(v) \cap H(u)$. (Since $H(o) = E^d$, we need only consider $u \neq o$.) We remind the reader that (one version of) Helly's theorem states that if an arbitrary family of closed convex sets in a $(d-1)$-dimensional space has the property that the intersection of every $d$ of the sets is non-empty, and some finite intersection of the sets is bounded, then the whole family has a non-empty intersection. Since it is clear that $H^{-}(v_1) \cap H^{-}(-v_1) \cap \cdots \cap H^{-}(v_d) \cap H^{-}(-v_d)$ is bounded whenever $\{v_1, \ldots, v_d\}$ is linearly independent, Helly's theorem is applicable in this case.

So, our main task is to show that each intersection $C \cap H(u)$ is non-empty, where for brevity we shall write $C = H^{-}(v_1) \cap \cdots \cap H^{-}(v_d)$. We need to consider five separate cases. In the first two, we suppose $\{v_1, \ldots, v_d\}$ to be linearly dependent. Inductively, we may assume the theorem to hold in $d-1$ or fewer dimensions (the case $d=1$ will be implicitly established below), so that $C$ is a non-empty cylinder. If $u \in \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_d\}$ (lin denotes the linear hull), then $C \cap H^{-}(u)$ is a non-empty cylinder supported by $H(u)$; otherwise $C$ contains a line which is not parallel to $H(u)$, and so meets $H(u)$. In either case, our intersection is non-empty.

For the remaining cases, then, we take $\{v_1, \ldots, v_d\}$ to be linearly independent. Thus $C$ is a simplicial cone, with apex $a = H(v_1) \cap \cdots \cap H(v_d)$, and for each $j = 1, \ldots, d$, the intersection of $C$ with all its bounding hyperplanes $H(v_i)$ except $H(v_j)$ is a ray (half-line) $L_j$, along which $<x, v_j>$ decreases without limit from $<a, v_j> = h(v_j)$.

Since $\{v_1, \ldots, v_d\}$ is a basis of $E^d$, we can write each (non-zero) $u \in E^d$ in the form $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d$, for some unique real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Then, along $L_j$,

$$\begin{aligned}<x,u> &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i <x, v_i> = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i h(v_i) + \lambda_j (<x, v_j> - h(v_j)) \\ &= <a,u> + \lambda_j (<x, v_j> - <a, v_j>),\end{aligned}$$

since $<x, v_i> = h(v_i) = <a, v_i>$ for $i \neq j$.

We now have three cases to consider. If some $\lambda_i$ are positive and some negative, then whatever the value of $<a,u>$ may be, we can choose some $j = 1, \ldots, d$, so that the value of $<x,u>$ along $L_j$ will assume the value $h(u)$.

Secondly, if each $\lambda_i \geq 0$ (with at least one positive), then the condition that $h$ is positive homogeneous and convex implies that

$$h(u) \leq \sum_{i=1}^{d} \lambda_i h(v_i) = <a,u> .$$

Now if $\lambda_j > 0$, then along $L_j$, $<x,u>$ decreases indefinitely, and thus somewhere takes the value $h(u)$.

Finally, if all $\lambda_i \leq 0$, we observe that $0 = h(o) \leq h(u) + h(-u)$, so that (with $-u$ instead of $u$ in the argument above)

$$h(u) \geqslant -h(-u) \geqslant -\sum_{i=1}^{d} (-\lambda_i)\, h(v_i) = \langle a, u \rangle \,.$$

Then if $\lambda_j < 0$, along $L_j$, $\langle x, u \rangle$ increases indefinitely, and will therefore somewhere take the value $h(u)$.

Hence we have established in all cases that $C \cap H(u) \neq \emptyset$, and so, by our earlier remarks, we have completed the proof of the theorem.

Peter McMullen, University College, London

REFERENCES

[1] T. BONNESEN and W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Springer-Verlag (Berlin 1934).
[2] H.G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge University Press (Cambridge 1958). MR23, A2123.
[3] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press (Princeton 1970). MR43, 445.
[4] F.A. VALENTINE, *Convex Sets*, McGraw-Hill (New York 1964). MR30, 503.

## Die Eindeutigkeit der Verbindungsebene im Raum

Wird Hilberts absoluten räumlichen Inzidenzaxiomen das (starke) Parallelenaxiom beigefügt ([1], §2, §22), dann erweisen sich gewisse vorher notwendige Forderungen im erweiterten System als überflüssig (s. [2]). Indessen ist das Postulat, dass drei nichtkollineare Punkte in höchstens einer Ebene liegen, zur Begründung der räumlichen affinen Geometrie notwendig. Würde es nämlich weggelassen, so könnte man sich mehrere Ebenen denken, die bezüglich der auf ihnen liegenden Punktmengen vollständig übereinstimmten. Doch selbst wenn man diese Besonderheit des Hilbertschen Systems, in dem Ebenen Grundobjekte und nicht Punktmengen sind, axiomatisch ausschliesst, so hat man sich noch nicht auf die affine Geometrie beschränkt. In der Tat lassen sich (genau) 39 nichtaffine Modelle konstruieren, die den erwähnten Forderungen genügen und in denen auf keiner Geraden mehr als zwei Punkte liegen. Sie umfassen allesamt fünf oder sechs Punkte und können, da Geraden und Punktpaare sich eineindeutig entsprechen, durch blosses Aufführen der zu den einzelnen Ebenen gehörenden Punktmengen charakterisiert werden. Hervorgehoben sei das durch

$ABCD, ABCE, ABDE, ACDE$

beschriebene minimale Modell, sowie das einzige mit nicht nur Vierpunkte-Ebenen, dessen Struktur aus der Aufzählung

$AB, ABCD, ABCE, ABCF, ABDE, ABDF, ABEF, CDEF$

abzulesen ist.

Entscheidend ist nun aber, dass das Postulat der Eindeutigkeit der Verbindungsebene gestrichen werden kann, wenn (neben dem Erheben der erwähnten schwachen Identitätsforderung) verlangt wird, dass auf einer Geraden wenigstens drei Punkte liegen. Dann kann nämlich mit Hilfe des Eindeutigkeitsteils des Parallelenaxioms gezeigt werden, dass jeder Punkt einer Ebene mit zwei Punkten eines festen, in ihr liegenden Geradendreiecks kollinear ist. Das bedeutet aber, dass er mit jeder durch das Dreieck gehenden Ebene inzidiert.

Es sei noch bemerkt, dass wenn die in [2] vorgeschlagene Variante des Parallelenaxioms benutzt wird, das Postulat der Eindeutigkeit der Verbindungsebene auch dann überflüssig ist, wenn man auf die Voraussetzung kollinearer Punktetripel verzichtet.

D. Ruoff und J. Shilleto, University of Regina, Regina, Canada

LITERATURVERZEICHNIS

[1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 10. Aufl., Tübingen (1968).

[2] D. Ruoff und J. Shilleto, *Das Parallelenaxiom im affinen Raum*, El. Math. *31*. 9–12 (1976).

# Aufgaben

**Aufgabe 749.** Für ein ebenes Dreieck bezeichnen $r$ den Inkreisradius, $F$ den Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, $G$ den Schwerpunkt, $H$ den Höhenschnittpunkt und $I$ den Inkreismittelpunkt. Man beweise $\overline{IF}:(\overline{IG}\cdot\overline{IH})\leq 3:4r$ mit Gleichheit genau für gleichschenklige Dreiecke.

I. Paasche, München, BRD

*Lösung:* Bekanntlich liegen die Punkte $H, F, G$ auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks so, dass gilt:

$$\overline{HG}=4\overline{FG}=4\overline{HF}/3 \tag{1}$$

Die drei Ptolemäischen Ungleichungen (Vgl. z.B. El. Math. *30* (1975) S. 133) für die vier Punkte $I, H, F, G$ liefern mit (1):

$$4\overline{IF}\leq 3\overline{IG}+\overline{IH}; \qquad 3\overline{IG}\leq 4\overline{IF}+\overline{IH}; \qquad \overline{IH}\leq 4\overline{IF}+3\overline{IG} \tag{2.1,2,3}$$

mit Gleichheit für $I, H, F, G$ auf einem Kreis oder auf einer Geraden. Da $H, F, G$ stets auf einer Geraden liegen, gilt das Gleichheitszeichen dann, wenn auch $I$ sich auf dieser Geraden befindet, d.h., für gleichschenklige Dreiecke. Weiter ist bekannt, dass der Inkreis und der Feuerbach-Kreis eines Dreiecks einander berühren, d.h.