Ein kombinatorisches Analogon zum Satz von Gauss-Bonnet

Autor(en): **Schneider, Rolf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 5

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32159

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 32 | Heft 5 | Seiten 105-136 | 10. September 1977

Ein kombinatorisches Anologon zum Satz von Gauss-Bonnet

Kürzlich hat H. Walser [7] für ebene n-Eck-Netze eine kombinatorische Formel angegeben, die eine formale Analogie zum Satz von Gauss-Bonnet aufweist. Wir wollen dieses elementare Gegenstück zur Gauss-Bonnetschen Formel im folgenden in allgemeinerer Form herleiten.

Hierzu betrachten wir einen endlichen (geometrischen) Zellkomplex $\mathfrak{Z}$, also eine endliche Menge von konvexen Polytopen des d-dimensionalen reellen affinen Raumes, den «Zellen» von $\mathfrak{Z}$, mit der Eigenschaft, dass alle Seiten einer Zelle ebenfalls zu $\mathfrak{Z}$ gehören und dass der Durchschnitt je zweier Zellen entweder leer oder eine gemeinsame Seite beider Zellen ist. Die Menge aller k-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{Z}$ sei mit Δ^k, deren Anzahl mit f_k bezeichnet ($k=0, \ldots, d$). Unter χ sei die Eulersche Charakteristik des Zellkomplexes $\mathfrak{Z}$ verstanden. Für das Folgende genügt die Kenntnis, dass sie sich durch die einfache Formel

$$\chi = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k f_k \tag{1}$$

berechnen lässt. Auf die Bedeutung der Charakteristik in allgemeineren Zusammenhängen und ihre Eigenschaften (z. B., dass sie nur vom topologischen Typ der Punktmenge $\bigcup\{Z \mid Z \in \Delta^k, k=0, \ldots, d\}$ abhängt) brauchen wir daher hier nicht einzugehen (der Leser sei jedoch einerseits auf Lehrbücher der Topologie, andererseits auf die Artikel von Hadwiger [3], Klee [4], insbesondere Theorem 2.3, und Rota [5] verwiesen).

Für jede Ecke E (nulldimensionale Zelle) des Zellkomplexes erklären wir die «Krümmung» in E durch

$$K(E) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{E \subseteq Z \in \Delta^k} \frac{1}{f_0(Z)}, \tag{2}$$

wo $f_0(Z)$ die Eckenzahl der Zelle Z bezeichnet. Dann gilt in Analogie zum Gauss-Bonnetschen Satz, dass die totale Krümmung gleich der Eulerschen Charakteristik ist:

$$\sum_{E \in \Delta^0} K(E) = \chi\,. \tag{3}$$

Zum Beweis setzen wir für beliebige Ecken E und Zellen Z von $\mathfrak{Z}$

$$\varphi(E,Z)=\begin{cases}1/f_0(Z), \text{ wenn } E\subseteq Z,\\ 0 \text{ sonst.}\end{cases}$$

Dann ergibt sich

$$\sum_{E\in\Delta^0}\sum_{E\subseteq Z\in\Delta^k}\frac{1}{f_0(Z)}=\sum_{E\in\Delta^0}\sum_{Z\in\Delta^k}\varphi(E,Z)=\sum_{Z\in\Delta^k}\sum_{E\in\Delta^0}\varphi(E,Z)$$

$$=\sum_{Z\in\Delta^k}\frac{1}{f_0(Z)}\sum_{E\subseteq Z}1=\sum_{Z\in\Delta^k}1=f_k$$

für $k=0,\ldots,d$, also unter Verwendung von (2) und (1)

$$\sum_{E\in\Delta^0}K(E)=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\sum_{E\in\Delta^0}\sum_{E\subseteq Z\in\Delta^k}\frac{1}{f_0(Z)}=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k f_k=\chi,$$

womit (3) schon bewiesen ist.

Die (zwecks grösserer Anschaulichkeit getroffene) Voraussetzung, dass ein geometrischer Zellkomplex zugrundeliege, ist offenbar nur teilweise ausgenutzt worden. Da es sich um rein kombinatorische Begriffe und Schlüsse handelt, überträgt sich alles sofort auf allgemeinere Situationen, wie topologische Zellkomplexe oder abstrakte Zellkomplexe im Sinne von Grünbaum ([2], S. 206). Man könnte auch, noch allgemeiner, an einen verbandstheoretischen Rahmen denken, in dem die Eulersche Charakteristik ihren natürlichen Platz hat (vgl. Klee [4], Rota [5]). Anstatt jedoch hierauf weiter einzugehen, wollen wir lieber zeigen, in welcher Weise in (3) die von Walser [7] angegebene Formel als Spezialfall enthalten ist. Dies ist vielleicht nicht unmittelbar ersichtlich, da in (7) eine «Randkurve» und ein als «geodätische Krümmung» interpretierter Term auftreten.

Wir betrachten also jetzt wie in (7) ein ebenes Netz N und in der Ebene eine geschlossene Jordankurve b, die keinen Knoten von N enthält und jede Kante oder zweidimensionale Zelle von N höchstens einmal schneidet. G sei der von b berandete kompakte Bereich. Wir betrachten dann folgenden (topologischen) Zellkomplex $\mathfrak{Z}$: Seine zweidimensionalen Zellen seien alle Durchschnitte von Zellen des Netzes N mit G, seine Kanten seien alle Durchschnitte von Kanten von N mit G sowie die Durchschnitte der Kurve b mit Zellen von N, seine Ecken seien alle Ecken von N in G sowie alle Durchschnitte von b mit Kanten von N. Die Menge der auf die letztgenannte Weise entstehenden Ecken bezeichnen wir mit Δ_1^0. Die Menge der 2-Zellen von N, die von b getroffen werden, sei mit B bezeichnet; für $Z\in B$ sei $r(Z)$ die Anzahl der in G liegenden Ecken von Z, und Δ_2^0 sei die Menge aller Ecken in G, die zu Zellen aus B gehören. Schliesslich sei Δ_3^0 die Menge aller nicht zu $\Delta_1^0\cup\Delta_2^0$ gehörenden Ecken in G.

Ist $E \in \Delta_2^0 \cup \Delta_3^0$, so ist E in gleich vielen Kanten wie 2-Zellen von $\mathfrak{Z}$ enthalten, daher ist

$$K(E) = 1 - \sum_{E \subseteq Z \in \Delta^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{f_0(Z)} \right).$$

Unsere kombinatorische Krümmungsdefinition stimmt also (bis auf den Faktor 2) überein mit der von Stone [6], S. 12, benutzten.
Wir wollen nun mit Walser [7] die Voraussetzung treffen, dass sämtliche Zellen des Netzes N n-seitig sind. Für alle $E \in \Delta_3^0$ ist dann

$$K(E) = 1 - i(E) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) =: K_w(E),$$

was mit der von Walser benutzten Krümmungsdefinition zusammenfällt; hier ist $i(E)$ die Ordnung der Ecke E. Für $E \in \Delta_2^0$ gilt

$$K(E) = 1 - \frac{i(E)}{2} + \sum_{E \subseteq Z \in \Delta^2} \frac{1}{f_0(Z)} = K_w(E) + \sum_{E \subseteq Z \in B} \left(\frac{1}{r(Z)+2} - \frac{1}{n} \right),$$

und für $E \in \Delta_1^0$ ist $i(E) = 3$, also

$$K(E) = -\frac{1}{2} + \sum_{E \subseteq Z \in B} \frac{1}{r(Z)+2}.$$

Somit erhalten wir aus (3) unter Beachtung der im vorliegenden Fall gültigen Eulerschen Formel $\chi = 1$

$$1 = \sum_{E \in \Delta^0} K(E) = \sum_{E \in \Delta_2^0 \cup \Delta_3^0} K_w(E) + \sum_{E \in \Delta_2^0} \sum_{E \subseteq Z \in B} \left(\frac{1}{r(Z)+2} - \frac{1}{n} \right)$$
$$+ \sum_{E \in \Delta_1^0} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{E \subseteq Z \in B} \frac{1}{r(Z)+2} \right).$$

Nun ist

$$\sum_{E \in \Delta_2^0 \cup \Delta_1^0} \sum_{E \subseteq Z \in B} \frac{1}{r(Z)+2} = \sum_{Z \in B} 1,$$

denn in der Doppelsumme tritt jede Zelle $Z \in B$ so oft auf, wie ihr Durchschnitt mit G Ecken besitzt, also $r(Z) + 2$mal. Analog ist

$$\sum_{E \in \Delta_2^0} \sum_{E \subseteq Z \in B} \left(-\frac{1}{n} \right) = \sum_{Z \in B} \left(-\frac{r(Z)}{n} \right)$$

und offenbar

$$\sum_{E\in\Delta_1^0}\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{Z\in B}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{E\in\Delta_2^0\cup\Delta_3^0} K_w(E)+\sum_{Z\in B}\left(\frac{1}{2}-\frac{r(Z)}{n}\right)=1,$$

was mit Formel (13) von Walser [7] übereinstimmt.
Abschliessend sei noch darauf hingewiesen, dass der Zusammenhang zwischen der Formel (3) und der Gauss-Bonnetschen Formel nicht nur in einer rein formalen Analogie zu sehen ist. Betrachten wir etwa einen endlichen Zellkomplex, der als Zellzerlegung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand erscheint. Wir können dann, wie man unschwer einsieht, auf M eine Metrik einführen derart, dass jede 2-Zelle des Zellkomplexes isometrisch wird zu einem regulären Polygon. Der für Mannigfaltigkeiten mit polyedrischer Metrik gültige Satz vom Gauss-Bonnetschen Typ (siehe z.B. Gluck, Krigelman und Singer [1], S. 605) reduziert sich in unserem Fall gerade auf die Formel (3) für $d=2$.

Rolf Schneider, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Gluck, K. Krigelman und D. Singer: The converse to the Gauss-Bonnet theorem in PL. J. Differential Geometry *9*, 601–616 (1974).
2 B. Grünbaum: Convex polytopes. London et al. 1967.
3 H. Hadwiger: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. J. reine angew. Math. *194*, 101–110 (1955).
4 V. Klee: The Euler characteristic in combinatorial geometry. Amer. Math. Monthly *70*, 119–127 (1963).
5 G.-C. Rota: On the combinatorics of the Euler characteristic. In: Studies in Pure Mathematics (presented to Richard Rado), 221–233, London 1971.
6 D.A. Stone: A combinatorial analogue of a theorem of Myers. Illinois J. Math. *20*, 12–21 (1976). Correction: ibid., 551–554.
7 H. Walser: Eine Übertragung der Formel von Gauss-Bonnet auf ebene Netze. Elem. Math. *31*, 59–64 (1976).