Über Spiele mit Quoten

Autor(en): **Schreiber, Alfred**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 5

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32162

On Yff's inequality for the Brocard angle of a triangle

If a_1, a_2, a_3 be the angles of a triangle with Brocard angle ω, it was conjectured by Yff in 1963 that

$$8\,\omega^3 \leq a_1 a_2 a_3. \tag{1}$$

A proof was published in this Journal *29*, 141–142 (1974), by F. Abi-Khuzam. Subsequently, Bottema, also in this Journal *31*, 13–14 (1976), gave a more elementary proof. Here, we give an even simpler proof which also provides an extension of the main lemma used, i.e.,

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \leq (3\sqrt{3}/2\pi)^3 a_1 a_2 a_3. \tag{2}$$

Since

$$D^2 \log \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \leq 0,$$

$\log[(\sin x)/x]$ is concave in $(-\pi, \pi]$. Therefore,

$$\sum_i \omega_i \log \frac{\sin x_i}{x_i} \leq \log \frac{\sin x}{x}$$

where $\omega_i \geq 0$, $\sum_i \omega_i = 1$, $x = \sum_i \omega_i x_i$. In particular,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin x_i}{x_i} \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \tag{3}$$

where $x = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ and $-\pi < x_i < \pi$, with equality, iff $x_i = x$. The rest of the proof is as before and is elementary.

M. S. Klamkin, University of Alberta, Canada

Elementarmathematik und Didaktik

Über Spiele mit Quoten

B. Gündel [1], S. 115ff. behandelt in unterhaltsamer Form einfache Beispiele von Glücksspielen, bei denen Geldbeträge ein- und ausgezahlt werden. [3] enthält eine Verallgemeinerung dieser Beispiele; deren Verwendbarkeit für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen steht in [4] zur Diskussion. Im Folgenden soll kurz über die den genannten Artikeln zugrunde liegende elementare Theorie der Spiele mit Quoten berichtet werden.

Spiele mit Quoten sind Glücksspiele, denen ein Zufallsversuch Z mit endlich vielen Ausgängen $A_1, \ldots, A_n$ zugrunde liegt. Die Spieler setzen Geldbeträge auf einen oder mehrere Ausgänge. Setzt ein Teilnehmer den Betrag $e_k \geq 0$ auf A_k, so erhält er vom Veranstalter (der «Bank») den Betrag $b_k \geq 0$ zurück, wenn Z den Ausgang A_k nimmt, andernfalls geht der Einsatz verloren. Der Quotient $q_k := b_k/e_k$ ist dabei für alle Einsätze $e_k > 0$ konstant und heisst *Auszahlungsfaktor* oder *Quote* für den Ausgang A_k.

Unter dieses Schema fallen die meisten Wetten, etwa beim Pferderennen, aber auch das Zahlenlotto sowie das Würfelspiel Cubus und die bekannten Versionen von Roulette und Roulca (vgl. [2]). Diese Spiele lassen sich noch danach klassifizieren, ob die Quotenverteilung $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ Bestandteil der Spielregeln und damit von vorneherein bekannt ist (wie z.B. beim Roulette-Spiel) oder erst nach Eingang aller Einsätze durch Totalisation endgültig bestimmt wird (wie z.B. beim Pferderennen). Für das Folgende wird stets angenommen, dass man sich ein Bild von der Verteilung der Quoten machen kann, bevor man über die Verteilung der Einsätze entscheidet.

Die für den Teilnehmer eines Spiels mit Quoten interessante Zufallsgrösse ist der *Reingewinn g*. Er berechnet sich für einen Ausgang A_k aus dem zurückerhaltenen Betrag b_k abzüglich aller investierten Einsätze $e_1, \ldots, e_n$, also

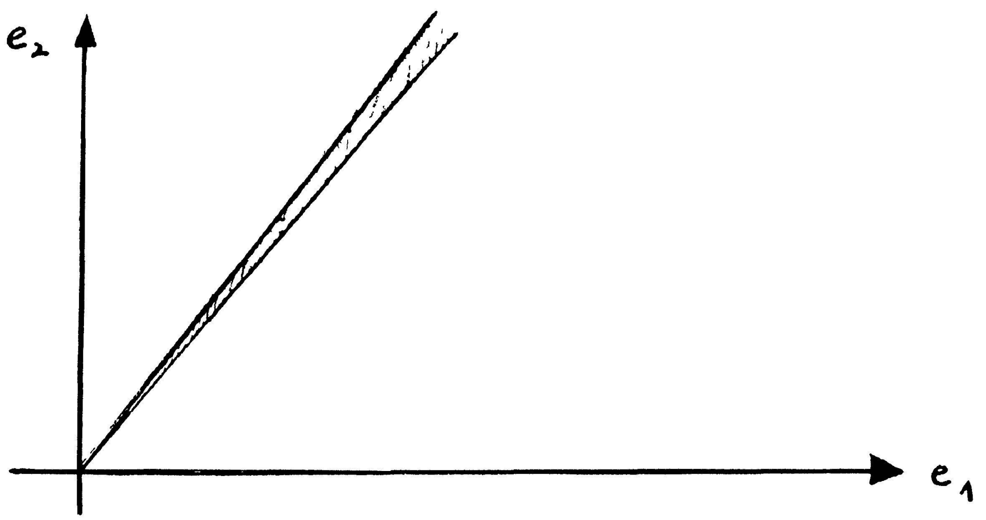
$$g(A_k) = q_k e_k - S, \text{ wobei } S = e_1 + \ldots + e_n.$$

Die Frage liegt nahe, wann ein Spieler seine Einsätze $e_k \geq 0$ so bestimmen kann, dass die jeweiligen Reingewinne $g(A_k)$ sämtlich positiv sind; ihm bliebe dann unabhängig vom Ausgang des Spiels stets ein gewisser Reinerlös. Wenn dies möglich ist, so heisse die zugrunde liegende Quotenverteilung *Q positiv*.

Als Beispiel betrachten wir Wetten über einen Versuch mit zwei *Ausgängen* A_1, A_2, etwa einen Boxkampf. Buchmacher I nehme Wetten für A_1 mit 23:10 an, Buchmacher II hingegen schliesse Wetten für A_2 mit 18:10 ab. Die hierdurch gegebene Quotenverteilung ist positiv genau dann, wenn das Ungleichungssystem

$$g(A_1) = 2{,}3e_1 - e_1 - e_2 > 0$$
$$g(A_2) = 1{,}8e_2 - e_1 - e_2 > 0$$

eine Lösung (e_1, e_2) mit $e_1, e_2 \geq 0$ besitzt. Tatsächlich ist dies der Fall, wie das beigefügte Schaubild der Lösungsmenge zeigt.



Der folgende Satz enthält ein Verfahren, mit dessen Hilfe man im allgemeinen Fall über die Positivität einer Quotenverteilung Q entscheiden sowie gegebenenfalls eine gewinnsichere Einsatzverteilung effektiv berechnen kann.

Satz I. Sei Z ein Spiel mit der Quotenverteilung $Q=(q_1, \ldots, q_n)$. Q ist genau dann positiv, wenn

$$v(Q)=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}>0$$

ist; in diesem Fall lässt sich sogar ein konstanter Reingewinn $G>0$ erzielen, wenn auf jeden Spielausgang mit der Quote q_k der Einsatz

$$e_k=\frac{G}{q_k v(Q)} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

gewettet wird.

Beweis: Wir setzen zunächst Q als positiv voraus. Dann gibt es $e_k \geq 0$ mit $q_k e_k - S>0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $S=e_1+\cdots+e_n$. Daraus folgt $1/q_k<e_k/S$ $(k=1,2,\ldots,n)$ und damit

$$v(Q)=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}>1-\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{S}=0.$$

Sei nun umgekehrt $v(Q)>0$. Wir wählen zu fest vorgegebenem $G>0$ die Einsätze $e_k=G/q_k v(Q)$. Daraus ergibt sich für die entsprechenden Gewinne

$$\begin{aligned} g(A_k)&=q_k\cdot\frac{G}{q_k v(Q)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{G}{q_i v(Q)} \\ &=\frac{G}{v(Q)}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}\right)=G. \end{aligned}$$

Dies beweist die zweite Behauptung des Satzes sowie die Positivität von Q.

Anmerkung. Die Frage, wie man auf das in Satz I ausgesprochene Resultat komme, lässt sich mindestens dreifach beantworten. Der tatsächliche Findungsweg verlief über die explizite Auflösung des Gleichungssystems $g(A_k)=G\,(k=1,2,\ldots,n)$ mittels der Cramerschen Determinantenregel. Weniger kompliziert sind Analogiebetrachtungen im Ausgang von den Sonderfällen $n=2$, $n=3$ (vgl. [4]) sowie eine später zu schildernde heuristische Überlegung, die den Begriff des Erwartungswertes benutzt.

Anwendung von Satz I auf das zuvor genannte Buchmacherbeispiel ergibt für $v(Q)$ den Wert $2/207$. Wollte man 100 DM sicher gewinnen, so wären dann beim ersten Buchmacher 4500 DM auf A_1, beim zweiten Buchmacher 5750 DM auf A_2 zu setzen. Dieses Beispiel, in dem eine vergleichsweise hohe Einsatzsumme resultiert, legt noch folgende Frage nahe: Wie hat man ein vorgegebenes begrenztes Kapital K auf die Ausgänge eines Spiels mit positiver Quotenverteilung $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ zu verteilen, wenn ein konstanter Reingewinn erzielt werden soll?

Dazu ist lediglich G so zu bestimmen, dass die Summe der Einsätze $e_k = G/q_k v(Q)$ gleich K wird, d.h.

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{G}{q_i v(Q)} = \frac{G}{v(Q)}(1 - v(Q)),$$

woraus man

$$G = \frac{v(Q)}{1 - v(Q)} \cdot K$$

und damit für die Einsatzverteilung

$$e_k = \frac{K}{1 - v(Q)} \cdot \frac{1}{q_k} (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erhält.

Bei einigen Spielen sind ausser den Quoten noch die Wahrscheinlichkeiten p_k der Versuchsausgänge A_k bekannt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung empfiehlt dann, den zu einer Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ gehörigen Erwartungswert des Reingewinns (oder mittleren Gewinn)

$$E(g) = \sum_{i=1}^{n} g(A_i) p_i$$

zur Beurteilung des Spiels heranzuziehen. Q heisst bei der Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ *günstig* (*fair, ungünstig*), wenn der zugehörige Erwartungswert $E(g)$ positiv (Null, negativ) ist. Für Spiele mit Quoten interessiert hier der Zusammenhang von $E(g)$ und $v(Q)$. Auskunft darüber gibt der

Satz II. Sei Z ein Spiel mit der Quotenverteilung $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ und der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P=(p_1, \ldots, p_n)$. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) Wird auf einen Ausgang mit der Quote q_k der Einsatz e_k gemacht, so beträgt der mittlere Gewinn

$$E(g) = \sum_{i=1}^{n} (q_i p_i - 1) e_i .$$

(2) Ist Q bei allen Einsatzverteilungen günstig (fair, ungünstig), so ist der Wert $v(Q)$ positiv (Null, negativ).

(3) Sind die Quoten antiproportional zu den Wahrscheinlichkeiten, so sind Erwartungswert und Einsatzsumme S linear abhängig, genauer:

$$E(g) = \frac{v(Q)}{1 - v(Q)} \cdot S .$$

Insbesondere gilt in diesem Fall die Umkehrung von Behauptung (2).

Beweis (1): Es gilt

$$E(g)=\sum_{i=1}^{n}(q_i e_i - S)p_i, \qquad S=e_1+\ldots+e_n,$$

also

$$E(g)=\sum_{i=1}^{n} q_i p_i e_i - S\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q_i p_i e_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(q_i p_i - 1)e_i .$$

(2): Ist Q bei allen Einsatzverteilungen günstig (fair, ungünstig), so müssen nach der in (1) bewiesenen Darstellung für den mittleren Gewinn die Koeffizienten $q_i p_i - 1$ sämtlich positiv (Null, negativ) sein. Man hat dabei nur zu beachten, dass in einer Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ alle $e_k \geq 0$ sind und $e_j > 0$ für mindestens ein j. Im Falle $q_i p_i - 1 > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ folgt also $1/q_i < p_i$ und damit

$$v(Q)=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i} > 1-\sum_{i=1}^{n} p_i = 0 .$$

Entsprechend erledigen sich die beiden übrigen Fälle.

(3): Die Antiproportionalität der Quoten q_k zu den Wahrscheinlichkeiten p_k besagt $q_k p_k = \lambda$ $(1 \leq k \leq n)$ für eine feste Konstante λ. Nach (1) folgt damit sofort $E(g)=(\lambda-1)S$, andererseits wird $v(Q)=1-(1/\lambda)$. Elimination von λ liefert die in Behauptung (3) angegebene Darstellung. Da $v(Q)<1$ und $S>0$ ist, haben $E(g)$ und $v(Q)$ stets dasselbe Vorzeichen, es gilt also die Umkehrung von (2).

Die Formel (1) für den Erwartungswert des Reingewinns erlaubt einen einfachen heuristischen Zugang zur Lösung des Gleichungssystems $g(A_k)=G$ $(k=1,2, \ldots, n)$, $G>0$. Zunächst ergibt sich nämlich $E(g)=G$. Versucht man nun einmal den Ansatz $e_k=\lambda/q_k$ mit festem $\lambda>0$, so folgt mittels (1) sofort $E(g)=\lambda\, v(Q)$, also $e_k=E(g)/q_k v(Q)=G/q_k v(Q)$.

Bekanntlich besitzt das Roulette-Spiel eine Quotenverteilung, die bei jeder Verteilung der Einsatzsumme S ungünstig ist, genauer gilt $E(g)=-S/37$ (vgl. [5], S. 35ff.). Jede sog. Chance ist nämlich mit einem zu ihrer Wahrscheinlichkeit antiproportionalen Auszahlungsfaktor behaftet; die genannte Tatsache folgt daher auch aus Satz II (3), wenn man nach kurzer Rechnung $v(Q)=-1/36$ gefunden hat. Ähnliche Überlegungen, die dem Leser überlassen bleiben, lassen sich für die Spiele Roulca und Cubus anstellen.

Eine eigene Problematik hat das Wetten beim Pferderennen. Die aus den Vorwetten bekannte Quotenverteilung $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ ist nämlich nicht notwendig auch die, nach der die Gewinne ausgeschüttet werden. Das liegt daran, dass die

Siegquote q_k für das k-te Pferd stets als Quotient aS/e_k, $S=e_1+\ldots+e_n$ mit $0<a\leq 1$ berechnet wird. Dabei ist e_k der auf Pferd k gewettete Gesamteinsatz und aS der vom Veranstalter ausgeschüttete Anteil von S. Wenn nun nach Bekanntgabe von Q die Spieler unmittelbar vor dem Rennen weitere Beträge setzen, etwa insgesamt e_k^* auf Pferd k, so entsteht durch die soeben beschriebene Totalisation mit dem Faktor a eine neue Quotenverteilung $Q^*=(q_1^*, \ldots, q_n^*)$. Diese kann erheblich von der ursprünglichen Verteilung abweichen.

Die neuen Quoten weichen aber gar nicht (oder nur geringfügig) von den alten ab, wenn die (meisten) Spieler nach einer «vorsichtigen Strategie» handeln und auf «Aussenseiter» kleinere, auf «Favoriten» grössere Einsätze geben, genauer: wenn die neuen Totaleinsätze e_k^* der Beziehung $e_k^*=\lambda/q_k$ mit einer festen Konstanten $\lambda>0$ genügen. In der Tat gilt dann

$$S^*=\sum_{i=1}^{n} e_i^*=\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}=\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{aS}=\frac{\lambda}{a}, \text{ d.h. } \lambda=aS^*.$$

Hieraus folgt weiter nach der Totalisationsvorschrift für die neuen Quoten

$$q_k^*=\frac{a(S+S^*)}{e_k+e_k^*}=\frac{a(S+S^*)}{aS+\lambda}\cdot q_k=q_k \qquad (1\leq k\leq n).$$

Unter der Hypothese, dass die Spieler angenähert die «vorsichtige Strategie» befolgen und damit die vorgegebene Quotenverteilung Q nicht wesentlich verändern, könnte man demnach versuchen, das Verfahren von Satz I auf Q anzuwenden. Es selbst gehört zur «vorsichtigen Strategie» genau dann, wenn $v(Q)>0$ ist; im übrigen ist es auch nur in diesem Fall anwendbar. Allerdings: Eine Quotenverteilung Q, die durch Totalisation mit einem Faktor a, $0<a\leq 1$ entsteht, ist wegen

$$v(Q)=1-\sum_{i=1}^{n}(1/q_i)=1-(1/a)$$

niemals positiv.

Alfred Schreiber, Neuss

LITERATUR

1 B. GÜNDEL, *Pythagoras im Urlaub*, 3.Aufl., Frankfurt a.M. - Berlin - Bonn 1964.

2 K. KRAUS, *Das Buch der Glücksspiele*, München 1966.

3 A. SCHREIBER, *Spiele und ihre Theorie. Methoden und Anwendungen der mathematischen Spieltheorie*, in: VDI-Nachr. Nr.23, S.25 (1972).

4 A. SCHREIBER, *Spiele mit Quoten als Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufen*, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, S. 169–173 Hannover 1975.

5 R. VOGELSANG, *Die mathematische Theorie der Spiele*, Bonn 1963.