Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken

Autor(en): **Struik, Saly Ruth**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32164

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 32 | Heft 6 | Seiten 137–160 | 10. November 1977

Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken

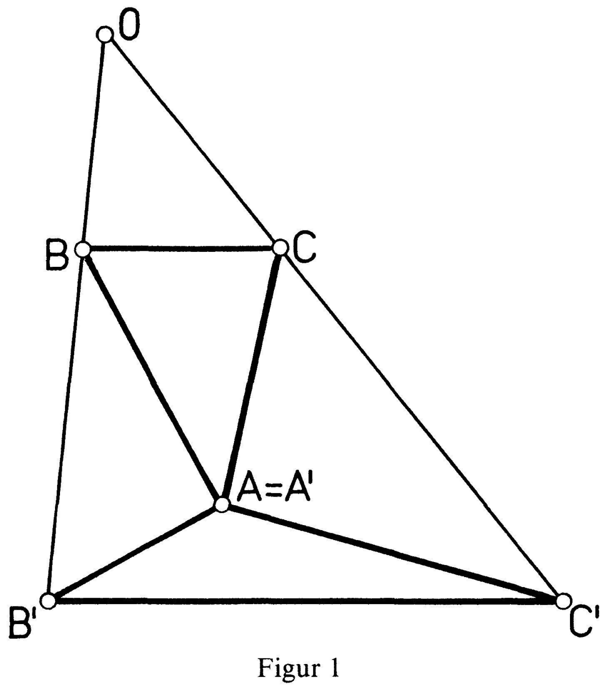
Der Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmt sich in der euklidischen Planimetrie nach der elementaren Formel

$$F=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$$

als das halbe Produkt aus einer Dreiecksseite und der entsprechenden Höhe. Insbesondere haben danach zwei Dreiecke gleichen Flächeninhalt, wenn sie in der Länge einer Seite und derjenigen der entsprechenden Höhe übereinstimmen. In diesem Falle ergibt sich die Flächengleichheit auch gemäss dem Cavalierischen Prinzip, wonach zwei Polygone flächengleich sind, wenn sie in eine solche Lage gebracht werden können, dass sie von jeder Geraden aus einer Schar von parallelen Geraden in Strecken gleicher Länge geschnitten werden. Zwei in solcher Weise flächengleiche Polygone mögen kurz «Cavalierisch gleich» genannt werden.
Tatsächlich ist dieses kein Spezialfall. Vielmehr soll im folgenden gezeigt werden, dass je zwei flächengleiche Dreiecke der euklidischen Ebene auch Cavalierisch gleich sind.
Dieses beruht auf folgendem Hilfssatz: Bei zwei flächengleichen Dreiecken können die Ecken (mit geeigneter Benennung) A, B, C beziehungsweise A', B', C', so zugeordnet werden, dass auf BC ein Punkt D und auf $B'C'$ ein Punkt D' so bestimmt wird, dass $|AD|=|A'D'|$ ist und

$$|BD|:|DC|=|B'D'|:|D'C'|\,.$$

Um diese Zuordnung der Ecken sowie die Punkte D und D' zu finden, bringe man die beiden Dreiecke zunächst in eine solche Lage, dass die Punkte A und A' zusammenfallen und die Strecke BC der Strecke $B'C'$ parallel ist.
Sehen wir ab von dem Falle, wo die Geraden BB' und CC' in der konstruierten Stellung der Dreiecke parallel ausfallen – in diesem Falle ist die Behauptung trivial –, so schneiden sich jene beiden Geraden in einem Punkte O. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dann die entstehende Figur in folgender Anordnung angenommen werden:



Figur 1

Nun werde die Verbindungslinie PQ der Mitten der Strecken BB' und CC' konstruiert. Diese ist parallel zu den Geraden BC und $B'C'$ und hat von beiden gleichen Abstand.

Ferner werde A mit O verbunden und über der Strecke AO als Durchmesser der Halbkreis, etwa nach der Seite von C, konstruiert. Dieser schneide die Gerade PQ im Punkte M (siehe Figur 2).

Wenn nun die Verbindungslinie von O mit M die Strecken BC und $B'C'$ *im Inneren* teilt, so sind die Teilpunkte D und D' die für unseren zu beweisenden Satz gesuchten.

In der Tat ist einerseits $|AD| = |AD'|$, was sich aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke AMD und AMD' ergibt (es ist ja $|MD| = |MD'|$), und ferner besteht die Proportion

$$|BD| : |DC| = |B'D'| : |D'C'|$$

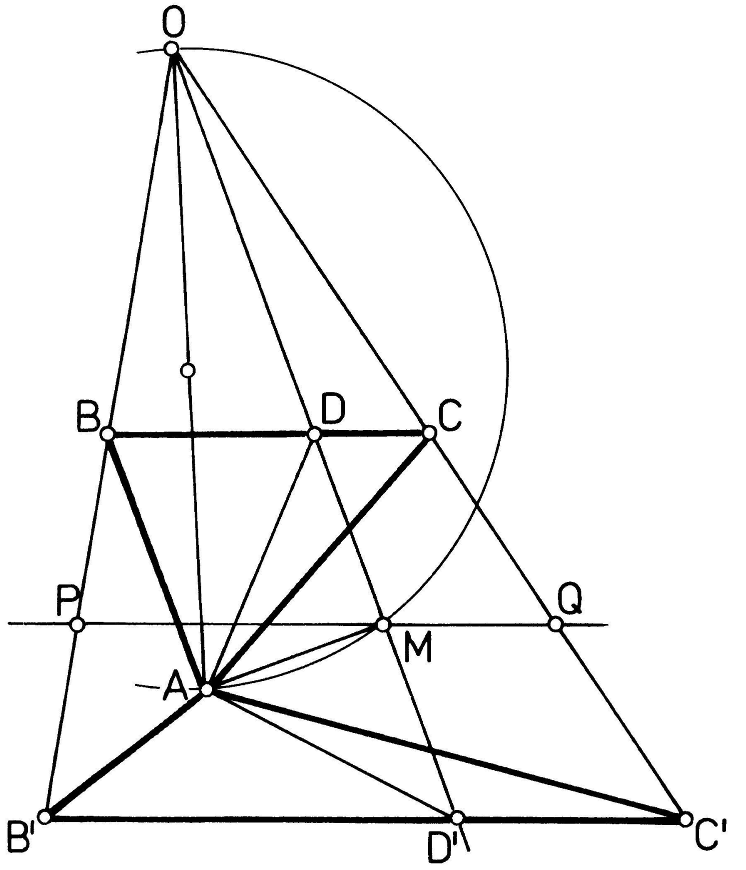
aufgrund der Parallelität der Geraden BC und $B'C'$.

Den Fall, dass die Gerade OM durch C geht, können wir beiseite lassen. In diesem Falle muss ja $|AC| = |AC'|$ sein, und die Cavalierische Gleichheit der Dreiecke ABC und $AB'C'$ folgt daher in trivialer Weise.

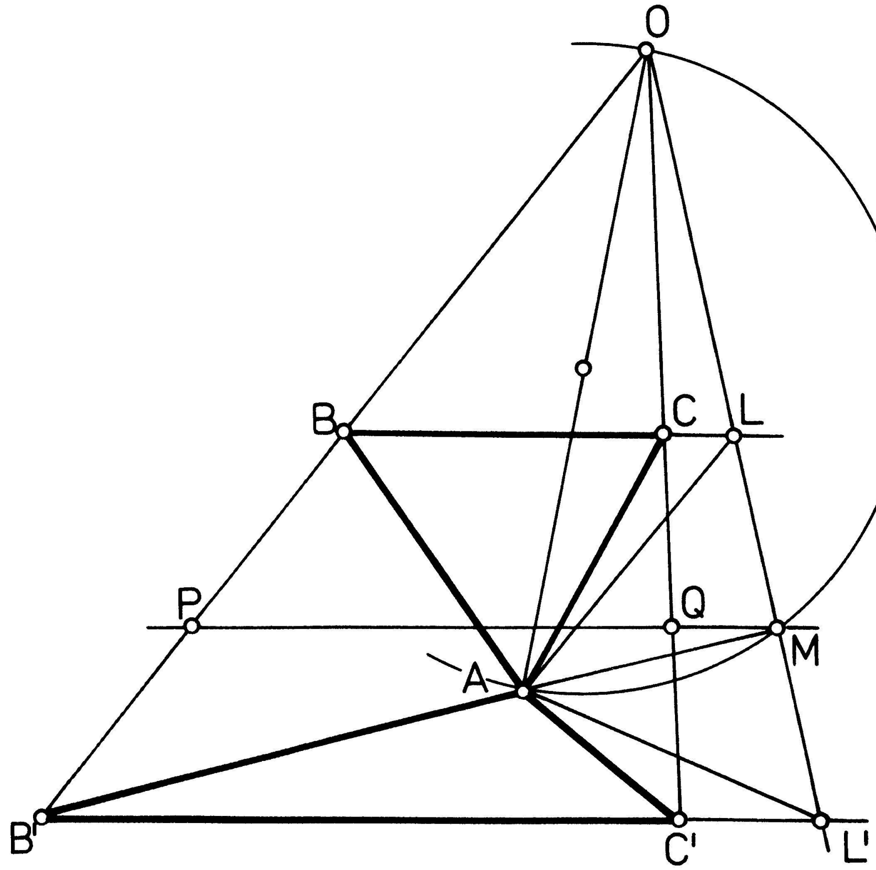
Es bleibt nun noch der Fall zu betrachten, dass die Gerade OM die Geraden BC und $B'C'$ ausserhalb der Dreiecksseiten BC und $B'C'$ in Teilpunkten L und L' trifft:

In diesem Fall wird eine weitere Konstruktion ausgeführt. Für diese machen wir Gebrauch von folgenden Umständen. Wegen der Parallelität der Geraden BC und $B'C'$ bestehen die Proportionen

$$|BC| : |CL| = |B'C'| : |C'L'|$$
$$|BC| : |BL| = |B'C'| : |B'L'| .$$

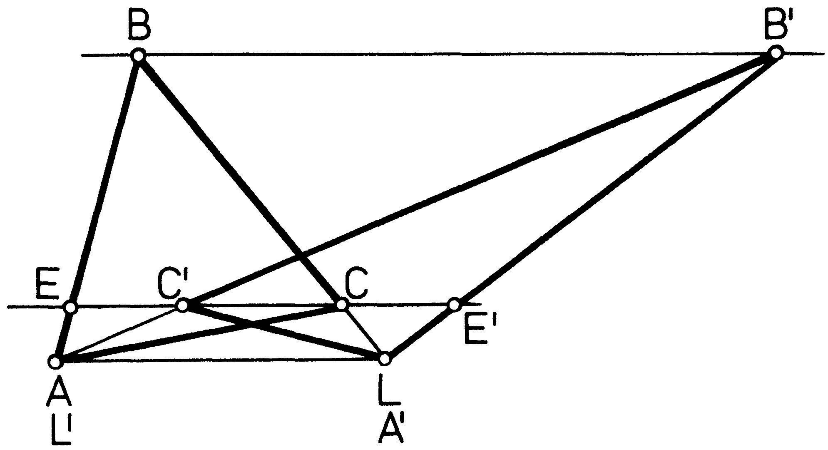


Figur 2



Figur 3

Aufgrund dieser Proportionen folgt aus der Inhaltsgleichheit der Dreiecke ABC und $AB'C'$ diejenige der Dreiecke ABL und $AB'L'$ sowie der Dreiecke ACL und $AC'L'$. Ausserdem ergibt sich (entsprechend wie im vorherigen Fall die Gleichung $|AD| = |AD'|$) nunmehr die Gleichheit der Strecken AL und AL'. Somit haben die Dreiecke ABL und $AB'L'$, wenn wir in ihnen AL und AL' als Grundlinien auffassen, gleiche Grundlinie und gleiche Höhe. Ebenso haben die Dreiecke ACL und $AC'L'$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe.
Bringen wir nun die beiden Dreiecke ABL und $AB'L'$, – das zweite jetzt $A'B'L'$ genannt – in eine solche Lage, dass A' auf L, L' auf A fällt, und B und B' auf derselben Seite der Geraden AL verbleiben, dann erhalten in der neuen Lage B und B' den gleichen Abstand von der Geraden AL; sie kommen also auf einer Parallelen zu AL zu liegen, ebenso die Punkte C und C'. Die Punkte B, C, L bleiben auf einer Geraden, ebenso die Punkte B', C', L'. Es entsteht also folgende Figur 4, worin die Schnittpunkte der Geraden CC' mit den Geraden AB und $A'B'$ mit E, E' bezeichnet sind:



Figur 4

Hier bestehen die Proportionen

$$|CE| : |LA| = |BC| : |BL|$$
$$|C'E'| : |L'A'| = |B'C'| : |B'L'|$$

ferner, wie zuvor bemerkt,

$$|BC| : |BL| = |B'C'| : |B'L'|$$

also

$$|CE| : |LA| = |C'E'| : |L'A'| \,.$$

Ausserdem ist aber $L'A'$ dieselbe Strecke wie AL und daher $|L'A'| = |LA|$.
Somit ergibt sich

$$|CE| : |LA| = |C'E'| : |LA|$$

d.h.

$$|CE| = |C'E'|\,.$$

Ferner ist, wegen der Parallelität der Geraden BB', EE', AA':

$$|BE| : |EA| = |B'E'| : |E'A'|\,.$$

Werden nun die Ecken der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ umbenannt:

$$A \text{ in } B\,, \qquad B \text{ in } C\,, \qquad C \text{ in } A$$

und entsprechend

$$A' \text{ in } B'\,, \qquad B' \text{ in } C'\,, \qquad C' \text{ in } A'$$

und die Teilpunkte E, E' in D, D', so sehen wir, dass für die neue Benennung der Ecken und der Teilpunkte unsere Behauptung über die beiden Dreiecke erfüllt ist, sodass auch in dem komplizierteren Falle unsere Behauptung gültig ist.

Aus dem so bewiesenen Hilfssatz folgt nun, dass je zwei flächengleiche Dreiecke ABC und $A'B'C'$ auch Cavalierisch gleich sind. Nehmen wir nämlich die Benennung der Ecken und die Wahl der Teilpunkte D auf BC und D' auf $B'C'$ so gewählt an, dass die Behauptung unseres Hilfssatzes erfüllt ist, so folgt zunächst, dass

$$|AD| = |A'D'|$$

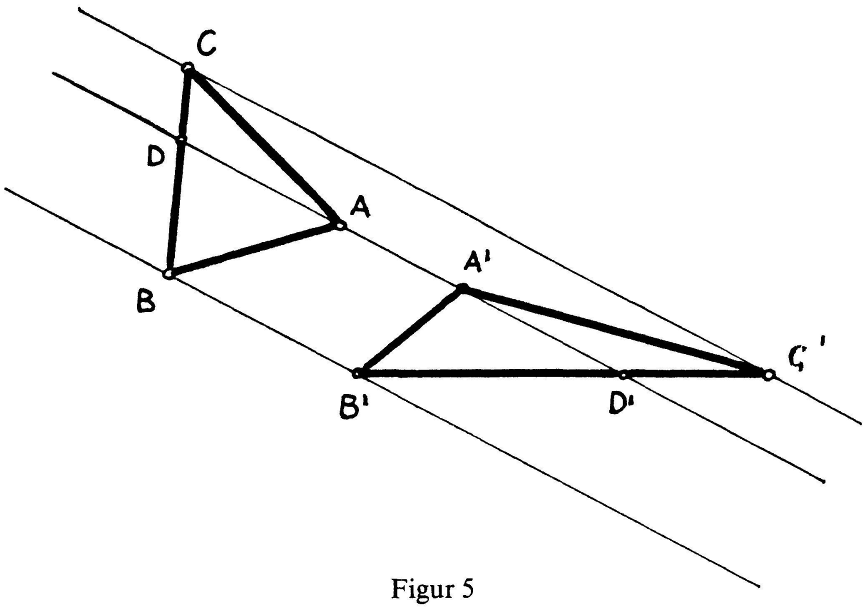
und aus den Proportionen

$$|BD| : |DC| = |B'D'| : |D'C'|$$

folgt, dass die Flächen der Teildreiecke ABD und ACD sich ebenso verhalten wie die Flächen der Teildreiecke $A'B'D'$ und $A'C'D'$. Da aber die ganzen Dreiecke als flächengleich vorausgesetzt sind, ergibt sich, dass die Dreiecke ABD und $A'B'D'$ einander flächengleich sind und ebenso die Dreiecke ACD und $A'C'D'$.

Fassen wir nun für die Teildreiecke des einen Dreiecks die Strecke AD, für die des anderen $A'D'$ als Grundlinie auf, so folgt, dass die Dreiecke ABD und $A'B'D'$ gleiche Höhe haben und ebenso die Dreiecke ACD und $A'C'D'$. Werden daher die ganzen Dreiecke ABC und $AB'C'$ in eine solche Lage gebracht, dass AD und $A'D'$ auf einer und derselben Geraden zu liegen kommen und die Punkte B und B' auf derselben Seite dieser Geraden liegen, so liegen nun B und B' auf einer Parallelen zu AD, ebenso C und C'. Aus der demgemäss entstehenden Figur 5 ist die Cavalierische Gleichheit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ersichtlich, da ja diese Dreiecke von jeder Geraden aus der Schar der Parallelen zu AD in bezüglich gleichen Strecken geschnitten werden.

Betrachten wir die erhaltene Figur 5 noch etwas näher. Als Spezialfall des Desargueschen Satzes ergibt sich, dass die Schnittpunkte der entsprechenden



Figur 5

Dreiecksseiten auf einer Geraden liegen. Wir können dieses hier noch etwas elementarer verfolgen.

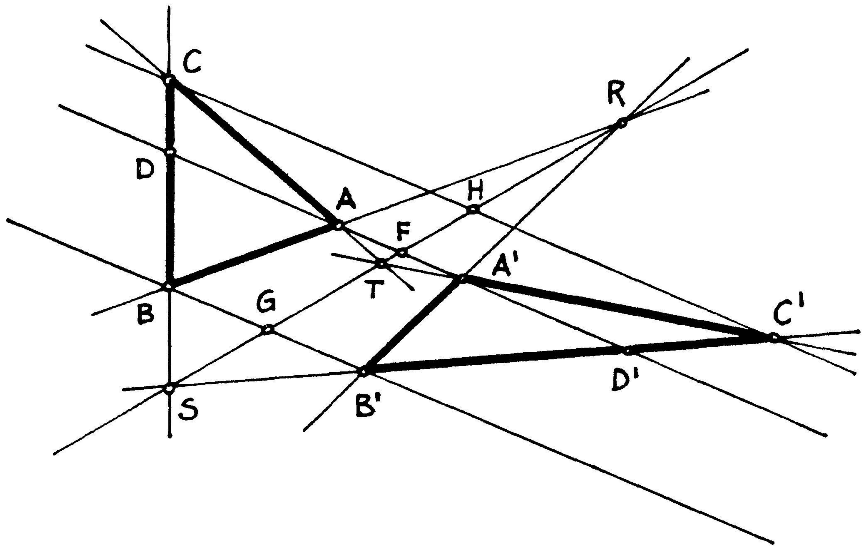
Es wird genügen, die Überlegung an einem typischen, nicht trivialen Falle darzulegen (siehe hierzu Figur 6). Nehmen wir an, dass sich die Geraden AB und $A'B'$ in einem Punkte R, die Geraden BC und $B'C'$ im Punkte S und die Geraden AC und $A'C'$ im Punkte T schneiden. Man verbinde R mit der Mitte G der Strecke BB'; die Gerade RG schneide die Gerade AA' in F; dann ergibt sich leicht aus den vorliegenden Proportionalitäten, dass F die Mitte von AA' ist. Entsprechend ergibt sich, dass die Gerade SG die Gerade AA', auf der ja auch D und D' liegen, in der Mitte zwischen D und D', also auch (da ja $|AD| = |A'D'|$) in der Mitte zwischen A und A', d.h. im Punkte F schneidet. Die Gerade SG trifft ferner CC' in der Mitte H zwischen C und C'.

Die Mitten F, G und H der drei Strecken AA', BB' und CC' liegen somit auf einer Geraden, und diese enthält den Schnittpunkt R der Geraden AB und $A'B'$, ferner den Schnittpunkt S der Geraden BC und $B'C'$ und auch, wie man leicht feststellt, den Schnittpunkt T der Geraden AC und $A'C'$. Es ergibt sich so die Figur 6.

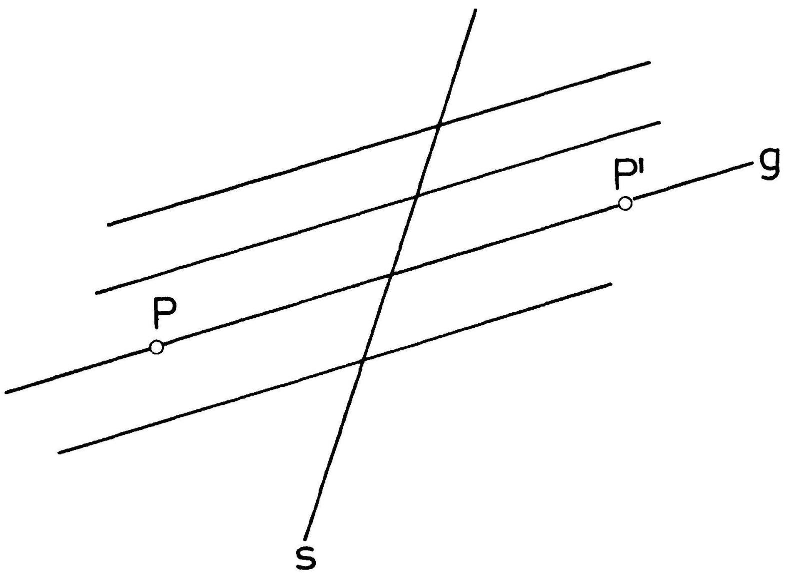
Aus diesem Beweise für den vorliegenden Spezialfall des Desarguesschen Satzes ersehen wir zugleich, dass die Cavalierische Gleichheit der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ eine *affine Spiegelung* ist.

Wir sprechen in der affinen Planimetrie von einer «affinen Spiegelung an einer Geraden s». Eine solche Spiegelung ist jeweils durch die betreffende Gerade s noch nicht eindeutig bestimmt, vielmehr erst unter Hinzunahme einer Schar paralleler Geraden, welche die spiegelnde Gerade s nicht enthalten darf, worin also jede ihr angehörende Gerade g einen Schnittpunkt mit s besitzt. Gemeint ist mit der affinen Spiegelung eine solche umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei welcher jedem Punkt P der Ebene derjenige Punkt P' entspricht, welcher auf derjenigen Geraden g aus der Schar der parallelen Geraden, welche den Punkt P enthält, so gelegen ist, dass P und P' von dem Schnittpunkt dieser Geraden g mit der spiegelnden Geraden s gleich weit entfernt sind.

Aus unserer vorherigen Betrachtung über die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$



Figur 6



Figur 7

ist nun ersichtlich, dass die entsprechenden Ecken der Dreiecke auseinander durch Spiegelung an derjenigen Geraden hervorgehen, welche die Mitten der drei Strecken AA', BB', CC' enthält, wobei die Schar der parallelen Geraden von den zu AA', BB', und CC' parallelen Geraden gebildet wird.

Saly Ruth Struik, Belmont, Mass., USA

Mein besonderer Dank gilt Prof. Paul Bernays, dessen Hilfe bei der endgültigen Fassung dieser Arbeit von grossem Wert gewesen ist.

Bemerkung der Redaktion: Dies ist die letzte mathematische Arbeit, die P. Bernays noch betreut hat. Er ist am 18. 9. 1977 in Zürich verstorben.