Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4 H. Hadwiger: Einige neue Ergebnisse über extremale konvexe Rotationskörper. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg, Bd. 18 (Dez. 1952).
5 H. Hadwiger: Über eine vollständige Schar extremaler konvexer Rotationskörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung *59*, Heft 1, 7–12 (1956).
6 H. Hadwiger: Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Masszahlen bei konvexen Rotationskörpern, Monatsh. Math. *56*, 3. Heft (1952).
7 H. Hadwiger: Minkowskische Ungleichungen und nichtkonvexe Rotationskörper. Math. Nachr. *14*, Heft 4/6 (Dez. 1956).
8 H. Hadwiger und H. Bieri: Eine Unstetigkeitserscheinung bei extremalen konvexen Rotationskörpern. Math. Nachr. *13*, Heft 1/2 (Jan./Feb. 1955).
9 H. Hadwiger und H. Bieri: Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper. El. Math. *XII/5* (1957).
10 H. Bieri: Die wichtigsten Publikationen finden sich in den Fussnoten von [11].
11 H. Bieri: Beitrag zu einem Extremalproblem über konvexe Rotationskörper. Exper. *XIV*, Fasc. 3, 113–116 (15. März 1958).
12 H. Bieri: Extremale konvexe Rotationskörper im V,F,M-Problem des R_3. El. Math. *24/6* (1969).
13 H. Bieri: Untersuchungen über rotationssymmetrische Kegelstümpfe. Seminario Mat. De Barcelona *VIII* (1955).

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle $n, m \in \mathbf{N}$ $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátai [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (kurz: E-Menge), wenn für jede vollständig additive, zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Die Menge $\mathbf{P}$ der Primzahlen ist offenbar eine E-Menge, jede echte Teilmenge von $\mathbf{P}$ dagegen nicht.
Kátai [4] zeigte, dass für ein gewisses $C > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbf{N}, n \leq C\} \cup \{p + 1, p \text{ prim}\}$$

E-Menge ist. Elliott [1] wies diese Eigenschaft für die Menge $\{p + 1\}$ nach. Indlekofer [2] gab eine Reihe weiterer Beispiele für E-Mengen an.
Es scheint bislang nicht bemerkt worden zu sein, dass E-Mengen auch wie folgt charakterisiert werden können:

Satz. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist E-Menge genau dann, wenn jedes natürliche n in der Gestalt*

$$n = a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} \quad (k \in \mathbf{N}_0;\ a_1, \ldots, a_k \in A;\ r_1, \ldots, r_k \textit{ rational}) \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

Eine unmittelbare Konsequenz hieraus und dem Satz von Elliott ist: Jedes $n \in \mathbf{N}$ kann in der Form

$$n = (p_1 + 1)^{r_1} \cdots (p_k + 1)^{r_k} \quad (k \in \mathbf{N}_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{P};\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}) \tag{2}$$

dargestellt werden.

Bemerkungen:
1. In (1) und (2) brauchen die einzelnen Faktoren $a_\nu^{r_\nu}$ bzw. $(p_\nu + 1)^{r_\nu}$ keine rationalen Zahlen zu sein, wie das Beispiel

$$2 = (31 + 1)^{3/7} (7 + 1)^{-8/21}$$

zeigt.
2. Die Darstellungen (1) und (2) sind nicht notwendig eindeutig, z. B. ist $2 = (3 + 1)^{1/2} = (7 + 1)^{1/3}$.
3. Im Hinblick auf den nachstehenden Beweis sei gesagt, dass eine vollständig additive Funktion von $\mathbf{N}$ in eindeutiger Weise auf die Zahlenmenge

$$\mathbf{W} = \{x : x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k};\ k \in \mathbf{N}_0;\ p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{P};\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}\}$$

fortgesetzt werden kann. Da jedes $x \in \mathbf{W}$ genau eine solche Darstellung besitzt, setze man einfach

$$f(x) = r_1 f(p_1) + \cdots + r_k f(p_k).$$

Etwas allgemeiner kann man daher Teilmengen von $\mathbf{W}$ als E-Mengen definieren. Die Forderung

$$f(A) = \{0\} \Rightarrow f(\mathbf{N}) = \{0\}$$

wird dadurch nicht berührt, denn schon aus $f(\mathbf{P}) = \{0\}$ folgt $f(\mathbf{W}) = \{0\}$.

Zum Beweis des Satzes (vereinfacht durch R. Warlimont):
Dass aus (1) die E-Mengen-Eigenschaft folgt, ist klar. Zum Nachweis der umgekehrten Richtung nehmen wir an, es gebe eine E-Menge A_0, für die nicht jedes n gemäss (1) dargestellt werden kann. Wir betrachten den Vektorraum V, der von den Zahlen

$$\log p, \quad p \in \mathbf{P}$$

über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen aufgespannt wird, d.h. die Menge der Zahlen $\log x\ (x \in \mathbf{W})$ mit der gewöhnlichen Addition als Vektoraddition. Sei U der Unterraum von V, welcher von den Zahlen

$$\log a, \quad a \in \mathbf{A}_0$$

erzeugt wird. Nach unserer Annahme ist U ein echter Unterraum von V, denn nicht für alle $n \in \mathbf{N}$ existiert eine Darstellung

$$\log n = r_1 \log a_1 + \cdots + r_k \log a_k \quad (a_1, \ldots, a_k \in A_0;\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}).$$

Jede Basis B_0 von U lässt sich zu einer Basis B von V ergänzen. Durch

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \in B_0, \\ 1 & \text{für } b \in B \setminus B_0 \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung von V in $\mathbf{Q}$ definiert, die nicht identisch verschwindet, für die aber $\varphi(U) = \{0\}$ gilt. Da sich für jedes $n \in \mathbf{N}$ genau eine Darstellung

$$\log n = r_1 b_1 + \cdots + r_k b_k \quad (b_1, \ldots, b_k \in B;\ r_k, \ldots, r_k \in \mathbf{Q})$$

finden lässt, wird durch

$$f(n) = r_1 \varphi(b_1) + \cdots + r_k \varphi(b_k)$$

eine vollständig additive Funktion definiert. Es gilt aber

$$f(A_0) = \{0\}, \qquad f(\mathbf{N}) \neq \{0\},$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Dieter Wolke, TU Clausthal-Zellerfeld

LITERATURVERZEICHNIS

1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. *26*, 11-20 (1974).
2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. *146*, 285-290 (1976).
3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. *13*, 315-320 (1968).
4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. *16*, 1-4 (1968).

Aufgaben

Aufgabe 781. $A = (a + md)_{m=0,1,2,\ldots}$ sei eine arithmetische Folge mit $a, d \in N$. Man beweise:

a) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler geometrischer Teilfolgen von A mit ganzzahligen, paarweise teilerfremden Quotienten.

b) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler Teilfolgen von A, von denen jede die Partialsummenfolge einer geometrischen Folge mit ganzzahligem Quotienten ist.

J. Binz, Bolligen