On the constructibility of rational angles

Autor(en): **Silver, Murray**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32938

Den Knoten $p(m,n,r)$ von G entsprechen dann umkehrbar eindeutig Knoten $p'(m',n')$ von G', und zwar gelten $n'=r$, $m'=m(b+1)+n$ für gerades m und $m'=m(b+1)+b-n$ für ungerades m. Diejenigen zur x-Achse parallelen Kanten von G, die bei der Abwicklung verlorengehen, werden zur Konstruktion der H-Wege gar nicht benötigt. Um nun die Existenz eines H-Weges von 0 nach p in G nachzuweisen, brauchen wir nur in G' einen H-Weg von 0 zum Bild p' zu finden. Wegen $(a'+1)(b'+1)=(a+1)(b+1)(c+1)$, $m'+n'=mb+m+n+r$ für gerades m und $m'+n'=(m+1)b-2n+m+n+r$ für ungerades m stellen wir fest: Sind $m+n+r, a, b, c$ gerade, so auch $m'+n', a', b'$; sind $m+n+r$ und eine der Zahlen a, b, c ungerade, so auch $m'+n'$ und eine der Zahlen a', b'. Nach Satz 1 existiert in G' ein H-Weg von 0 nach p' und somit in G ein H-Weg von 0 nach p.

Ein Korollar zu Satz 3 ist

Satz 4. *Im Quadergraphen $G(a,b,c)$ gibt es genau dann einen Hamiltonkreis, wenn mindestens eine der Zahlen a, b, c ungerade ist.*

Der Beweis geht wie der von Satz 2.

Für die Schule kaum von Bedeutung, für den Lehrer aber vielleicht von Interesse ist die natürliche Verallgemeinerung der Sätze auf beliebige Dimensionen. Wir formulieren sie in

Satz 5. *Ein Knoten $p(n_1,n_2,\dots,n_k)$ des k-dimensionalen Quadergraphen $G(a_1,a_2,\dots,a_k)$ ist genau dann von 0 aus H-erreichbar, wenn entweder die Zahlen $n_1+n_2+\cdots+n_k, a_1, a_2, \dots, a_k$ gerade oder $n_1+n_2+\cdots+n_k$ und mindestens eine der Zahlen a_j ungerade sind.*

In G existiert genau dann ein Hamiltonkreis, wenn mindestens eine der Zahlen a_j ungerade ist.

Der interessierte Leser möge den Beweis selber führen. Als Hinweis sei einzig bemerkt, dass für den Existenzbeweis die gleiche Idee der «Abwicklung» in die Dimension $k-1$ zum Ziele führt, die wir beim Beweis von Satz 3 benützt haben; allfällige Schwierigkeiten bei der Durchführung sind rein formaler Art.

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Gerald L. Thompson: Hamiltonian Tours and Paths in Rectangular Lattice Graphs. Math. Mag. *50*, 147–150 (1977).

On the constructibility of rational angles

Which angles can be constructed with a compass and straightedge? This paper answers the question in the case that the degree measure of the angle is a rational number.

Theorem. *Let the degree measure of an angle be p/q where p and q are relatively prime integers. This angle is constructible with a compass and straightedge if and*

only if 3 *divides p and q equals one, a power of two or a power of two, times the linear product of Fermat primes other than three or five.*
The first four well known lemmata are stated without proof.

Lemma 1. *If a is a constructible angle and I an integer, $I\,a$ is constructible.*

Lemma 2. *If a and β are constructible angles, then for any integers I_1 and I_2, $I_1\,a \pm I_2\beta$ is constructible.*

Lemma 3. *(Gauss 1796* [1], *Wantzel 1837* [2]*): The regular n-gon is constructible if and only if n is a power of two, times the linear product of Fermat primes.*

Lemma 4. *A 20° angle is not constructible.*

Remark: Since 20° is the central angle of the regular 18-gon, this lemma follows directly from the previous lemma. In 1897, as a student, Landau gave an independent proof of this lemma see [3].

Lemma 5. *The* 3° *angle is constructible.*

Proof: The 36° angle is constructible by lemma 3 for $n=10$. By lemma 2, $6° = 36° - 30°$ is constructible. Bisect the 6° angle.

Lemma 6: *If p is an integer, an angle of p degrees is constructible if and only if* 3 *divides p.*

Proof: If 3 divides p, then $I=p/3$ is an integer, and an angle of $3I=p$ is constructible by lemmata 1 and 5. Suppose p is constructible, and 3 does not divide p; then there exist integers I_1 and I_2 such that $3I_1+pI_2=1$. By lemma 2, 1° would be constructible and by lemma 1, 20° would be constructible. This, however, contradicts lemma 4. Hence if 3 does not divide p, an angle of p degrees is not constructible.

Lemma 7. *Let p/q be the degree measure of an angle, where $(p,q)=1$. If this angle is constructible,* 3 *divides p.*

Proof: If p/q were constructible, then by lemma 1, $(p/q)\,q=p$ would be constructible. Hence, by lemma 6, 3 must divide p.

Lemma 8. *If $(p,q)=1$, $3p/q$ is constructible if and only if $3/q$ is constructible.*

Proof: If $3/q$ is constructible, $3p/q$ is constructible by lemma 1. On the other hand, since $(p,q)=1$, there exist integers I_1 and I_2 such that $pI_1+qI_2=1$. Multiply this equation by $3/q$; hence, $(3p/q)\,I_1+3I_2=3/q$. If $3p/q$ is constructible, lemmata 5 and 2 together with the last equation imply that $3/q$ is constructible.

Lemma 9. *Let $(30p,q)=1$, then $3p/q$ is constructible if and only if q is the linear product of Fermat primes.*

Proof: An angle $3p/q$ with $(p,q)=1$ is constructible if and only if $3/q$ is constructible (lemma 8). By the same lemma, the angle $3\cdot 120/q$ with $(120, q)=1$ is constructible if and only if $3/q$ is. Hence $3p/q$ with $(30p, q)=1$ is constructible if and only if $360/q$ is. But $360/q$ is the central angle of the regular q-gon. By lemma 3, this angle is constructible if and only if q equals a power of two, times the linear product of Fermat primes.

The cases of $q=2,3,5$, are not covered by the last lemma and are now settled separately. More precisely, the cases not covered by the last lemma are whenever $(q, 30)>1$.

Lemma 10. $3p/2$ *is constructible.*

Proof: Bisect the $3°$ angle and apply lemma 1.

Lemma 11. *Let* $(p,3)=1$; *then* $p/3$ *is not constructible.*

Proof: $(p,3)=1$ implies that 3 does not divide p. By lemma 7, the angle is not constructible.

Lemma 12. *If* $(p,5)=1, 3p/5$ *is not constructible.*

Proof: By lemma 8, $3p/5$ is constructible if and only if $3/5$ is constructible. If $3/5$ were constructible then $14{,}4=15-(3/5)$ would be constructible (lemma 2); 14,4 is the central angle of the regular 25-gon and by lemma 3, not constructible.

Lemma 13. *Let d be a divisor of q, then the nonconstructibility of p/d implies the nonconstructibility of p/q.*

Proof: Write $q=dq_1$. If p/q is constructible, then so is $(p/dq_1)q_1=p/d$ by lemma 1.

Proof of the Theorem: Let $(p,q)=1$. The angle p/q is constructible only if 3 divides p (lemma 7), therefore $(q,3)=1$. In the case $q=1$, this condition is also sufficient (lemma 6). If $q>1$, write $q=2^n\cdot 5^m N$, where $(N,30)=1$. Then the angle p/q with p divisible by 3, is constructible only if $m=0$ (lemmata 12 and 13) and N is a linear product of Fermat primes (lemma 9). Conversely p/N is constructible (lemma 9), and consequently $p/2^nN$ is also constructible by repeated bisection (lemma 10), q.e.d.

Murray Silver, Selectronics, Philadelphia, USA

REFERENCES

1 C. F. Gauss: Disquisitiones Arithmeticae. Translated by Arthur Clarke. Yale University Press, New Haven, Conn. 1968.

2 M. L. Wantzel: Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. J. Math. Pures Appl. *2*, 369 (1837).

3 L. Bieberbach: Theorie der Geometrischen Konstruktionen, p. 153. Verlag Birkhäuser, Basel 1952.