

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Rektifizierbare vierdimensionale Simplexes  
**Autor:** Berger, Johann  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32944>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Summen als nichtabbrechende (oder identisch verschwindende) Dualbrüche interpretierbar sind: Zwei solche haben verschiedene Werte, sobald sie nicht an allen Stellen übereinstimmen. Somit folgt  $\Phi(A) \neq \Phi(B)$ .

Als eine bemerkenswerte *Konsequenz* des hiermit bewiesenen Satzes erwähnen wir:  $\Phi$  ist wegen der Definitheit und Additivität monoton: d.h. aus  $A \subset B$  ( $\subset$  bezeichne die strenge Inklusion) folgt jedenfalls  $\Phi(A) \leq \Phi(B)$ . Wegen der Injektivität folgt nun weiter  $\Phi(A) < \Phi(B)$ ; d.h.  $\Phi$  ist *streng monoton*. Nach Vorgabe von  $\Phi$  ist somit durch  $A < B \Leftrightarrow \Phi(A) < \Phi(B)$  eine *strenge lineare Ordnung*  $<$  in  $\mathfrak{R}$  definiert, welche die bereits vorhandene (nicht lineare) Ordnungsrelation  $\subset$  in  $\mathfrak{R}$  respektiert: Aus  $A \subset B$  folgt  $A < B$ . Damit ist eine bekannte Existenzaussage (die Fortsetzbarkeit jeder Ordnung zu einer linearen Ordnung) für den speziellen Fall der Inklusion eigentlicher Polygone in einer sehr konkreten Weise, gleichsam mittels «Punktbewertung» (hierzu [3, 4]), nachgewiesen.

Im Hinblick auf die Überschrift dieser Note sei schliesslich bemerkt, dass unsere Überlegungen gültig bleiben, wenn  $\mathfrak{R}$  die Menge aller *eigentlichen Polyeder*, für beliebige Dimension  $k$ , bedeutet. Hierfür hat man sich nur klarzumachen, dass auch in diesem Fall ein Isomorphismus  $\varphi$  von  $\mathfrak{R}$  auf einen Punktmengenverband existiert, derart dass mit jedem nichtleeren Polyeder  $A$  aus  $\mathfrak{R}$  auch  $A^\varphi$  innere Punkte besitzt.

Arnold Kirsch, Kassel

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Aumann: Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen? *El. Math.* 7, 25–28 (1952).
- 2 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
- 3 A. Kirsch: Lässt sich jede «gerechte» Rangordnung durch eine Punktbewertung erzeugen? *Math.-Phys. Semesterber.* 15, 94–101 (1968).
- 4 A. Kirsch: «Gerechte» lineare Ordnungen und Punktbewertungen. *Der Mathematikunterricht* 15/1, 64–84 (1969).

## Rektifizierbare vierdimensionale Simplexes

Herrn Prof. H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

### 1. Übersicht

Zwei eigentliche Polyeder  $A, B$  heissen *zerlegungsgleich*, geschrieben  $A \sim B$ , wenn sie im Sinne der Elementargeometrie in Teilpolyeder  $A_1, \dots, A_n$  bzw.  $B_1, \dots, B_n$  so zerlegt werden können, dass  $A_i$  mit  $B_i$  kongruent ist (für  $i = 1, \dots, n$ ). Insbesondere nennen wir mit Goldberg [5] jedes Polyeder  $A$ , das zu *einem Würfel zerlegungsgleich* ist, *rektifizierbar*. Ein Interesse an der Aufsuchung rektifizierbarer Polyeder liegt

im Umstand, dass ihr Volumen ohne Anwendung der euklidischen Exhaustionsmethode herleitbar ist. Goldberg [3–5] hat alle rektifizierbaren Tetraedertypen des euklidischen Raumes  $E^3$  tabelliert; es handelt sich um drei einparametrische Scharen von Hill [8] sowie um weitere 27 Einzeltetraeder. Es ist bisher nicht abgeklärt, ob die Liste vollständig ist.

In der vorliegenden Arbeit werden Methoden dargelegt, die zur Auffindung rektifizierbarer vierdimensionaler Simplexes führen. Als Resultat ergeben sich drei zu den Hillschen analoge einparametrische Scharen, drei weitere unendliche Scharen, bei denen alle Diederwinkel rationale Vielfache von  $\pi$  sind und einer davon als  $q\pi$  mit  $0 < q < 1/2$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  frei vorgebar ist, sowie eine noch unvollständige Reihe von mindestens 19 Einzelsimplexes. Die Resultate sind im Abschnitt 7 zusammengefasst.

## 2. Grundlagen

Zur Auffindung rektifizierbarer vierdimensionaler Simplexes dienen einerseits die für alle Raumdimensionen gültigen Ergebnisse der von Hadwiger entwickelten Zerlegungstheorie der Polyeder, die in [6] zusammengefasst sind.

Daraus entnehmen wir speziell das Ausgangsresultat (A):

- a) *Jedes Parallelotop ist rektifizierbar.*
- b) *Ist das Polyeder  $B$  in die Teilpolyeder  $B_1$  und  $B_2$  zerlegbar und sind  $B$  und  $B_1$  rektifizierbar, so ist auch  $B_2$  rektifizierbar.*
- c) *Ist das Polyeder  $B$  in endlich viele Teilpolyeder zerlegbar, die alle mit dem Polyeder  $C$   $\pm$ -kongruent sind, und ist  $B$  rektifizierbar, so ist auch  $C$  rektifizierbar.*

Wie in c) unterscheiden wir durchwegs die die Spiegelungen einschliessende erweiterte Kongruenz von der (orientierungstreuen) Kongruenz durch die Bezeichnung  $\pm$ -Kongruenz.

Andererseits stützen wir uns auf die von Jessen [9] für Polyeder des  $E^4$  bewiesene Umkehrung des Satzes von Hadwiger [6], S. 51. Durch sie gelingt es, die Zerlegungsgleichheit von Polyedern rechnerisch vollständig zu erfassen, gleich wie im  $E^3$  aufgrund der von Sydler [11] bewiesenen Umkehrung des Satzes von Dehn [2]. Wir benötigen nur den folgenden Spezialfall des Satzes von Hadwiger und Jessen als Ausgangsresultat (B):

*Jedes Polyeder des  $E^4$  mit lauter rationalen Diederwinkeln ist rektifizierbar.*

Dabei nennen wir einen Winkel  $\alpha$  rational, wenn gilt  $\alpha = q\pi$  mit  $q \in \mathbb{Q}$ .

Gleich wie Goldberg a. a. O. suchen wir auch im  $E^4$  durch Zerlegung von Parallelotopen und anderen als rektifizierbar erkannten Polyedern sowie durch direkte Konstruktion gemäss (B) zu rektifizierbaren Simplexes zu gelangen.

## 3. Hadwiger-Hillsche Hypertetraeder

In Verallgemeinerung einer von Hill [8] angegebenen Konstruktion im  $E^3$  hat Hadwiger [7] eine unendliche Schar rektifizierbarer Simplexes im  $E^k$  (für jedes  $k \in \mathbb{N}$ )

aufgewiesen. Gegenüber der elementargeometrischen Methode Hills ist die Konstruktion Hadwigers viel anschaulicher. Wir beschreiben letztere hier für unseren Fall  $k=4$ ; die entsprechenden Modifikationen für beliebiges  $k$  sind offensichtlich. Es bezeichne  $\omega$  eine reelle Zahl im offenen Intervall  $J=(-1/3, 1)$ . Es gibt dann Systeme  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  von vier linear unabhängigen Einheitsvektoren des  $E^4$  derart, dass das Skalarprodukt  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \omega$  ist (für  $1 \leq i < j \leq 4$ ), so dass die Zwischenwinkel  $\theta = \arccos \omega$  je zweier dieser Vektoren alle gleich sind. Die Menge  $H_0(\omega) = \{\sum_1^4 \lambda_i \mathbf{a}_i; 1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_4 = 0\}$  ist dann die konvexe Hülle  $(A_0 A_1 A_2 A_3 A_4)$  der Punkte  $A_0 = 0, A_i = \sum_1^i \mathbf{a}_j$  ( $i=1, \dots, 4$ ), wobei wir Einfachheit halber Punkte und ihre Ortsvektoren identifizieren.  $H_0(\omega)$  ist ein vierdimensionales Simplex, und wir nennen jedes zu  $H_0(\omega)$  ähnliche Simplex des  $E^4$  ein *Hadwiger-Hillsches Hypertetraeder vom Grundtyp  $H_0$* . Aus [7] übernehmen wir den

**Satz 1.** *Jedes Hadwiger-Hillsche Hypertetraeder ist rektifizierbar.*

Dies ergibt sich mit (A) daraus, dass das Parallelotop  $P = \{\sum_1^4 \lambda_i \mathbf{a}_i; 0 \leq \lambda_i \leq 1, i=1, \dots, 4\}$  in  $4!$  Teilsimplexes zerlegbar ist, von denen jedes mit  $H_0(\omega)$   $\pm$ -kongruent ist.

Durch Zerlegung von  $H_0(\omega)$  in kongruente Simplexes, analog zum ursprünglichen Verfahren Hills, erweitern wir Satz 1 auf zwei weitere Scharen  $\{H_1(\omega)\}_{\omega \in J}$  und  $\{H_2(\omega)\}_{\omega \in J}$  von abgeleiteten Hadwiger-Hillschen Hypertetraedern. Wir gehen aus von einem Simplex  $(A_0 A_1 A_2 A_3 A_4)$  vom Grundtyp  $H_0$ ;  $M$  sei der Mittelpunkt der Kante  $A_0 A_4$  und  $N$  der Mittelpunkt der Kante  $A_1 A_3$  (Abb. 1). Eine einfache Rechnung zeigt, dass gilt:

$$|A_0 A_2| = |A_2 A_4|, \quad |A_1 A_4| = |A_0 A_3|, \quad |A_1 M| = |A_3 M|, \quad |A_0 N| = |A_4 N|.$$

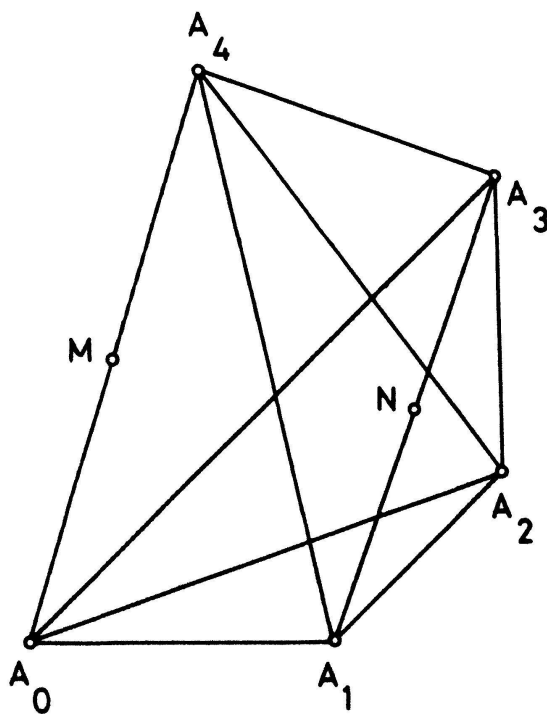


Abb. 1



Die Teilsimplex  $(A_0A_1A_2A_3M)$  und  $(A_1A_2A_3A_4M)$  bzw.  $(A_0A_1A_2A_4N)$  und  $(A_0A_2A_3A_4N)$  sind also kongruent und damit rektifizierbar. Wir bezeichnen die zugehörigen Simplex mit  $H_1(\omega)$  bzw.  $H_2(\omega)$  und nennen jedes zu  $H_1(\omega)$  bzw.  $H_2(\omega)$  ähnliche Simplex des  $E^4$  ein *Hadwiger-Hillsches Hypertetraeder vom Grundtyp  $H_1$  bzw.  $H_2$* .

Die drei Scharen  $\{H_i(\omega)\}$  ( $i=0, 1, 2$ ) sind verschieden, so ist z. B. die Maximalzahl gleichlanger eindimensionaler Kanten im allgemeinen vier bei  $H_0(\omega)$ , drei bei  $H_1(\omega)$  und zwei bei  $H_2(\omega)$ .

#### 4. Simplexbestimmung im $E^4$

Die Indices  $i$  und  $j$  sollen im folgenden stets die Indexmenge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  durchlaufen. Ein vierdimensionales Simplex  $S \subset E^4$  lässt sich durch seine Eckpunkte  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{i4})$  oder auch durch die orientierten Trägerebenen  $\tilde{E}_j$  seiner dreidimensionalen Seitenflächen  $F_j$  charakterisieren; dabei sei  $\tilde{E}_j$  durch den von  $\tilde{E}_j$  aus nach dem Simplexinnern weisenden Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}_j = (n_{j1}, \dots, n_{j4})$  und den signierten Abstand  $d_j$  zum Ursprung festgelegt, also

$$\tilde{E}_j = \{x \in E^4 \mid x \cdot \mathbf{n}_j + d_j = 0\}$$

und

$$S = \{x \in E^4 \mid x \cdot \mathbf{n}_j + d_j \geq 0\}.$$

Die fünf Eckpunkte  $x_i$  sind frei vorgebar bis auf die Nebenbedingung (C), dass keine vier in einer Hyperebene liegen. Die fünf Trägerebenen  $\tilde{E}_j$  sind durch  $\mathbf{n}_j$  und  $d_j$  frei vorgebar bis auf die Nebenbedingungen (D), dass  $|\mathbf{n}_j| = 1$ , dass je vier der  $\mathbf{n}_j$  linear unabhängig sind und dass positive reelle Zahlen  $\lambda_j$  so existieren, dass  $\sum_0^4 \lambda_j \mathbf{n}_j = 0$  und  $\sum_0^4 \lambda_j d_j > 0$  (vgl. z. B. [1], S. 184f.). Die Inzidenz zwischen Eckpunkten und Seitenflächen wird durch das Gleichungssystem

$$x_j \cdot \mathbf{n}_i + d_i = 0 \quad (\text{für } i \neq j) \quad (1)$$

wiedergegeben, und bei vorgegebenen  $x_j$  gemäss (C) lassen sich aus (1) eindeutig  $\mathbf{n}_i$  und  $d_i$  gemäss (D) bestimmen und umgekehrt. Bezeichnet  $h_i = x_i \cdot \mathbf{n}_i + d_i$  die Simplexhöhe von  $x_i$  auf die gegenüberliegende Trägerebene  $\tilde{E}_i$  der Seitenfläche  $F_i$ , so können wir die Informationen über Ecken und Seitenflächen in den beiden Matrizen

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{01} & \dots & & & x_{41} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{04} & \dots & & & x_{44} \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} d_0 & n_{01} & \dots & n_{04} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ d_4 & n_{41} & \dots & n_{44} \end{vmatrix}$$

zusammenfassen, bei denen die Spaltenvektoren von  $X$  (bis auf die Eins) die Eck-

punkte von  $S$  und die Zeilenvektoren von  $N$  die Seitenflächen von  $S$  bestimmen. Nun ist das Gleichungssystem (1) und die Zusatzinformation über die Höhen  $h_i$  ausdrückbar durch die Matrizengleichung

$$NX = \{h_0, \dots, h_4\} E, \quad (2)$$

in welcher  $E$  die Einheitsmatrix und der Vorfaktor eine Diagonalmatrix mit den angegebenen Diagonalelementen bezeichnen. Nach dem zuvor Gesagten bestimmen sich  $N$  und  $X$  gegenseitig mittels (2) ohne Kenntnis der  $h_i$ . Rechnerisch besonders einfache Verhältnisse gewinnt man, wenn man  $S$  nur bis auf Kongruenz festlegen will, weil dann  $X$  und  $N$  unterhalb der Hauptdiagonalen lauter Nullen haben dürfen. Dies entspricht der speziellen Lage von  $S$ , bei der  $x_0$  im Ursprung liegt und bei der für  $m = 1, \dots, 4$  die Ecke  $x_m$  in dem von den  $m$  ersten Koordinatenachsen aufgespannten Unterraum von  $E^4$  liegt. Aus den in der  $N$ -Matrix enthaltenen Normalenvektoren  $\mathbf{n}_i$  lassen sich die für unsere Untersuchung wichtigen Diederwinkel  $a_{ij}$  zwischen den Seitenflächen  $F_i$  und  $F_j$  berechnen gemäss

$$a_{ij} = \pi - \arccos \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j. \quad (3)$$

## 5. Rationale Simplexscharen

Durch direkte Konstruktion passender  $N$ -Matrizen gemäss 4 gelingt es, drei unendliche Scharen  $\{Q_i(q)\}$  ( $i=0, 1, 2$ ) von Simplexes mit lauter rationalen Diederwinkeln zu finden und damit das Ausgangsergebnis (B) auszunutzen.

**Satz 2.** Für jedes rationale  $q$  aus dem Intervall  $0 < q < 1/2$  sind die folgenden Simplexes  $Q_0(q)$ ,  $Q_1(q)$  und  $Q_2(q)$  rektifizierbar:

$$N(Q_0(q)) = \begin{vmatrix} d_0 & -y & 0 & 0 & -y \\ 0 & zu - v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & -zu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$N(Q_1(q)) = \begin{vmatrix} d_0 & -y & 0 & -y & 0 \\ 0 & zu - v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & -zu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$N(Q_2(q)) = \begin{vmatrix} d_0 & -y & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & zu - v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & -u & -u \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dabei verwenden wir die Abkürzungen  $u = \cos(1/2)(1-q)\pi$ ,  $v = (\cos q\pi)^{1/2}$ ,  $y = 2^{-1/2}$ ,  $z = 2^{1/2}$ , so dass also stets  $|n_i| = 1$  gilt. Die Diederwinkel  $a_{ij}$  gemäss (3) sind alle rational, und  $a_{12}$  hat bei allen drei Scharen den frei vorgebbaren Wert  $q\pi$  mit  $0 < q < 1/2$  und  $q \in \mathbb{Q}$ . Die drei Simplexscharen sind (abgesehen von speziellen Parameterwerten) unter sich und von den Hadwiger-Hillschen Scharen verschieden. So weist etwa  $Q_0(q)$  zwei Diederwinkel  $\pi/4$  auf,  $Q_1(q)$  besitzt eine Seitenfläche, die mit den übrigen Seitenflächen drei Rechte und einen Diederwinkel  $\pi/4$  einschliesst, und  $Q_2(q)$  hat insgesamt nur drei rechte Diederwinkel. Diese Eigenschaften kommen den Simplexes der anderen Scharen nicht allgemein zu. Zwischen den drei Scharen  $\{Q_i(q)\}$  ( $i=0, 1, 2$ ) bestehen die folgenden geometrischen Verwandtschaften:  $Q_0(q)$  wird durch die Halbierungsebene des Diederwinkels  $a_{03}$  in zwei zu  $Q_1(q)$  kongruente Simplexes zerlegt, und  $Q_2(q)$  wird durch die Halbierungsebene des Diederwinkels  $a_{34}$  in zwei spiegelbildlich liegende zu  $Q_1(q)$   $\pm$ -kongruente Simplexes zerlegt. Schliesslich sind die speziellen Simplexes  $H_1(0)$  und  $Q_0(1/3)$  ähnlich.

## 6. Zerlegung regulärer Polytope

Mürner [10] hat gezeigt, dass die folgenden regulären vierdimensionalen Polytope rektifizierbar sind: der *Hyperwürfel*  $Z_8$ , das *Hyperoktaeder*  $Z_{16}$ , das *Vierundzwanzigzell*  $Z_{24}$  und das *Hyperdodekaeder*  $Z_{120}$ . Wir zerlegen nun diese Polytope in  $\pm$ -kongruente Teilsimplexes wie folgt:  $P_0$  sei ein beliebiger Eckpunkt des Polytopes,  $P_i$  ( $0 < i \leq 4$ ) sei der Mittelpunkt einer  $i$ -dimensionalen Kante des Polytopes, welche  $P_0, \dots, P_{i-1}$  enthalte, insbesondere  $P_4$  der Mittelpunkt des Polytopes. Die konvexe Hülle der Punkte  $P_0, \dots, P_4$  nennen wir ein charakteristisches Simplex des regulären Polytopes. Offenbar setzt sich das rektifizierbare reguläre Polytop aus zum charakteristischen Simplex  $\pm$ -kongruenten Teilsimplexes zusammen, die wegen (A) rektifizierbar sind. Jedes der angegebenen regulären Polytope  $P$  lässt sich auch auf andere Weise in lauter  $\pm$ -kongruente Teilsimplexes  $S$  zerlegen.

Wie man durch Veranschaulichung im  $E^3$  leicht sieht, ist jede dreidimensionale Seitenfläche  $F$  von  $P$  auf vielfache Weise in lauter  $\pm$ -kongruente, gegenüber dem Mittelpunkt  $P_3$  von  $F$  symmetrisch angeordnete Tetraeder  $T$  zerlegbar. Die vierdimensionale Pyramide mit Basis  $T$  und Spitze  $P_4$  ist dann ein solches rektifizierbares Simplex  $S$ . Z.B. sind die dreidimensionalen Seitenflächen des regulären 16-Zells reguläre Tetraeder, von denen jedes symmetrisch in 1, 2, 4, 6, 8, 12 oder 24  $\pm$ -kongruente Tetraeder zerlegt werden kann. Die letztgenannte Möglichkeit liefert das erwähnte charakteristische Simplex des 16-Zells (in der Tabelle:  $S_7$ ), und die übrigen Möglichkeiten lassen sich auch als Vereinigung solcher charakteristischer Simplexes gewinnen.

Die so entstandenen rektifizierbaren Simplexes sind nicht alle verschieden, z. B. sind die charakteristischen Simplexes des 16-Zells und des 24-Zells ähnlich, und das charakteristische Simplex des 8-Zells ist ein  $H_0(0)$ ; ferner ist das durch die oben beschriebene Achter-Zerlegung des 16-Zells entstehende Simplex ein  $H_2(0)$ .

Typ	$\cos \alpha_{01}$	$\cos \alpha_{02}$	$\cos \alpha_{03}$	$\cos \alpha_{04}$	$\cos \alpha_{12}$	$\cos \alpha_{13}$	$\cos \alpha_{14}$	$\cos \alpha_{23}$	$\cos \alpha_{24}$	$\cos \alpha_{34}$
$H_0(\omega)$	$\sqrt{\frac{1+3\omega}{2(1+2\omega)}}$	0	0	$-\frac{\omega}{1+2\omega}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1+3\omega}{2(1+2\omega)}}$
$H_1(\omega)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3\omega}{1+\omega}}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3\omega}{1+\omega}}$	$\sqrt{\frac{1+\omega}{2(1+2\omega)}}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1+3\omega}{2(1+2\omega)}}$
$H_2(\omega)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3\omega}{1+2\omega}}$	0	0	$-\frac{\omega}{1+2\omega}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3\omega}{1+2\omega}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1+3\omega}{2(1+2\omega)}}$
$Q_0(q)$	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos q\pi$	0	0	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$Q_1(q)$	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	$\cos(1+q)\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cos q\pi$	0	0	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$Q_2(q)$	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	$\cos(1+q)\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos q\pi$	0	0	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	$\cos(1-q)\frac{\pi}{2}$	0
$S_1$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_6$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_7$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_8$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_9$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_{10}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S_{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{13}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$S_{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$S_{15}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$S_{16}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$S_{17}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0
$S_{18}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$S_{19}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0

## 7. Weitere Zerlegungen

Die von Goldberg [5] beschriebene Methode lässt sich leicht auf den vierdimensionalen Fall übertragen: wir legen durch eine zweidimensionale Kante eines rektifizierbaren vierdimensionalen Simplex  $S$  die Winkelhalbierungsebene des Diederwinkels. Hat eines der beiden Teilsimplices lauter rationale Diederwinkel oder ist es zu einem bereits als rektifizierbar erkannten Simplex ähnlich, dann sind beide Teilsimplices rektifizierbar. Diese Zerlegung lässt sich für jede zweidimensionale Kante von  $S$  durchführen und bei positivem Ergebnis an den Teilsimplices iterieren. Verf. hat die umfangreichen Berechnungen der  $X$ - und  $N$ -Matrizen mit Hilfe des Computers durchgeführt und vorläufig eine 19 rektifizierbare Simplexes umfassende Reihe von verschiedenen Einzelsimplices gefunden.

## 8. Resultate

Die Tabelle auf S. 113–114 gibt eine Übersicht über die bisher gefundenen rektifizierbaren vierdimensionalen Simplexes. Statt der Diederwinkel  $a_{ij}$  gemäss (3) werden ihre Cosinuswerte tabelliert. Die Einzelsimplices  $S_1$  bis  $S_6$  sind Teilsimplices des 8-Zells, die Simplexes  $S_7$  bis  $S_{12}$  sind Teilsimplices des 16-Zells, und die Simplexes  $S_{13}$  bis  $S_{19}$  stellen den Anfang der durch Zerlegung des 120-Zells erzeugten Reihe dar. Die Tabelle gestattet die Konstruktion der zugehörigen  $N$ -Matrizen mit lauter Nullen unterhalb der Hauptdiagonale.

## VERDANKUNG

Ich möchte Herrn Prof. H.E. Debrunner für dessen wertvolle Hilfe bei der endgültigen Fassung dieser Arbeit und für die Angabe der Schar  $\{Q_2(q)\}$  meinen besonderen Dank aussprechen.

Johann Berger, Bern

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H.S.M. Coxeter: Regular Polytopes. Methuen & Co., London 1948.
- 2 M. Dehn: Über den Rauminhalt. Math. Ann. 55, 465–478 (1901).
- 3 M. Goldberg: Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection. El. Math. 13, 107–109 (1958).
- 4 M. Goldberg: Two More Tetrahedra Equivalent to Cubes by Dissection. El. Math. 24, 130–132 (1969).
- 5 M. Goldberg: New Rectifiable Tetrahedra. El. Math. 29, 85–89 (1974).
- 6 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer Verlag, 1957.
- 7 H. Hadwiger: Hill'sche Hypertetraeder. Gazeta Mat. 50, 47, 48 (1951).
- 8 M. Hill: On the Volumes of Certain Species of Tetrahedra. Proc. Lond. math. Soc. 27, 39–53 (1896).
- 9 B. Jessen: Zur Algebra der Polytope. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. II, S.47–53 (1972).
- 10 P. Mürner: Zwei Beispiele zur Zerlegungsgleichheit 4-dimensionaler Polytope. El. Math. 29, 132–135 (1974).
- 11 J.P. Sydler: Sur les Tétraèdres équivalents à un cube. El. Math. 11, 78–81 (1956).