

# Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen

Autor(en): **Harborth, Heiko**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32945>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen

Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Paul Erdős zum 65. Geburtstag

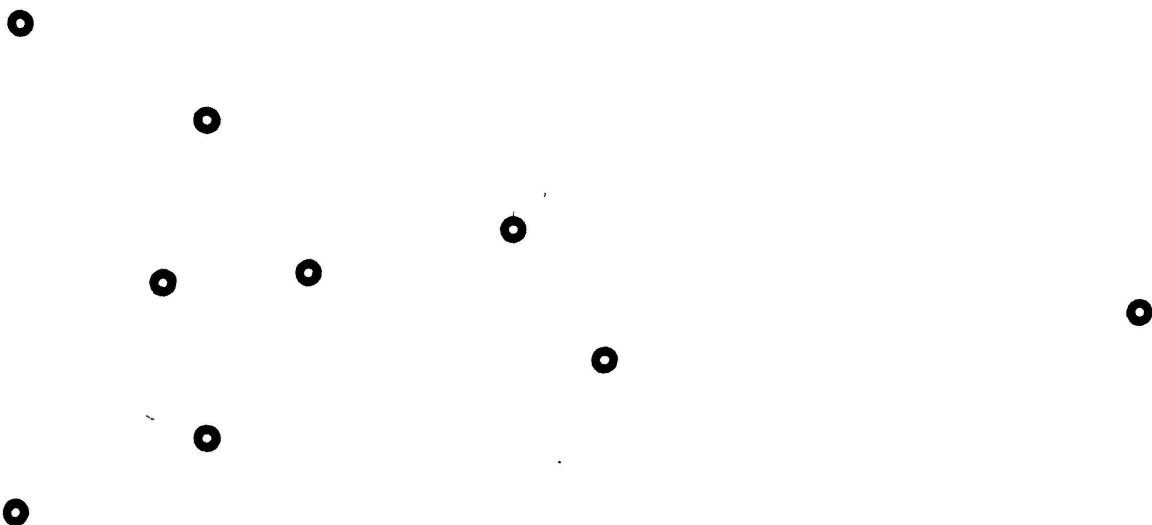
Es wird die folgende Frage ([1]) gestellt:

Gibt es für jede natürliche Zahl  $n$  in der Ebene  $n$  Punkte so, dass niemals drei auf einer Geraden liegen und dass jedes durch die Punkte gebildete konvexe Fünfeck mindestens einen weiteren der  $n$  Punkte im Inneren enthält?

Ein bekanntes Ergebnis (siehe z. B. [2–6]) sichert die Existenz einer kleinsten Zahl  $f(k)$  derart, dass in jeder Punktmenge von  $n \geq f(k)$  Punkten der Ebene (keine drei kollinear)  $k$  Punkte zu finden sind, die ein konvexes  $k$ -Eck bilden. Es ist  $f(k) \geq 1 + 2^{k-2}$  bewiesen und Gleichheit vermutet worden. Bisher sind jedoch nur  $f(3) = 3$ ,  $f(4) = 5$  und  $f(5) = 9$  nachgewiesen.

Entsprechend zu  $f(k)$  kann nun nach der Existenz einer kleinsten Zahl  $g(k)$  gefragt werden, so dass unter  $n \geq g(k)$  Punkten der Ebene (keine drei kollinear) immer  $k$  Punkte als konvexes  $k$ -Eck so zu finden sind, dass in seinem Inneren keiner der  $n$  Punkte liegt. Natürlich muss  $g(k) \geq f(k)$  gelten. Trivial ist  $g(3) = 3$ . Auch  $g(4) = 5$  ergibt sich unmittelbar. Unter fünf Punkten gibt es nämlich wegen  $f(4) = 5$  ein konvexes Viereck, das entweder schon leer ist oder den fünften Punkt enthält. Dieser liegt dann auf einer Seite einer Vierecksdiagonalen und bildet mit deren Endpunkten und dem auf der anderen Seite liegenden Eckpunkt wieder ein konvexes Viereck, das nun ohne innere Punkte ist. Die Frage nach der Existenz von  $g(k)$  bleibt hier für  $k \geq 6$  offen. Durch  $g(5) = 10$  soll jedoch die eingangs gestellte Frage beantwortet werden.

**Satz.** *In der Ebene sind unter  $n$  Punkten, von denen keine drei kollinear sind, genau für jedes  $n \geq 10 = g(5)$  immer fünf Punkte zu finden, die ein konvexes Fünfeck bilden, das im Inneren keinen der  $n$  Punkte enthält.*



**Beweis:** Die neun Punkte der Figur bestätigen  $g(5) \geq 10$ . – Nun sei  $X_n$  für  $n \geq 10$  eine Punktmenge von  $n$  Punkten (keine drei kollinear). Wegen  $f(5) = 9$  gibt es in

$X_n$  ein konvexes Fünfeck. Liegen  $m$  der  $n$  Punkte im Inneren und gilt  $m \geq 2$ , so soll durch zwei der  $m$  inneren Punkte eine Gerade gelegt werden. In einer Halbebene liegen dann mindestens drei der Eckpunkte des Fünfecks. Diese bilden zusammen mit den zwei Punkten auf der Geraden wieder ein konvexes Fünfeck mit nun höchstens  $m-2$  inneren Punkten. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich ein konvexes Fünfeck  $F = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  mit keinem (wie behauptet) oder genau einem inneren Punkt  $M$ . Es bedeutet im weiteren  $\{U, V, W, \dots\}$  ein Vieleck, dessen Eckpunkte links herum, nacheinander  $U, V, W, \dots$  sind. Ausserdem bezeichnen  $UV$  die von  $U$  nach  $V$  gerichtete Gerade durch die Punkte  $U$  und  $V$  und  $(UV)$  die Halbebene rechts von  $UV$ . Indizes sollen modulo 5 gleich sein.

Nur wenn alle fünf Vierecke  $G_i = \{M, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\}$  konvex sind, ist nicht schon im Inneren von  $F$  ein leeres konvexes Fünfeck. Weitere Punkte von  $X_n$  können nur noch in einem der fünf Bereiche  $A_i = (P_i M) \cap (P_i P_{i+1}) \cap (M P_{i+1})$  liegen. Ein Punkt in  $A_i \cap (P_i P_{i-1})$  oder in  $A_i \cap (P_{i+2} P_{i+1})$  mit kürzestem Abstand zu  $P_i P_{i+1}$  bildet mit  $G_{i-1}$  oder  $G_i$  ein leeres konvexes Fünfeck. Daher sei  $Q_i$  ein Punkt von  $X_n$ , der in  $B_i = A_i \cap (P_{i-1} P_i) \cap (P_{i+1} P_{i+2})$  liegt und kürzesten Abstand  $d_i$  zu  $P_i P_{i+1}$  hat. Ein Punkt in  $B_i \cap (Q_i P_i)$  oder in  $B_i \cap (P_{i+1} Q_i)$  mit kürzestem Abstand zu  $P_i P_{i+1}$  ( $\cong d_i$ ) bildet zusammen mit  $\{Q_i, P_{i+1}, M, P_i\}$  ein leeres konvexes Fünfeck. Es sei nun  $S_i$  ein zweiter Punkt von  $X_n$ , der deshalb in  $C_i = B_i \cap (P_i Q_i) \cap (Q_i P_{i+1})$  liegt und der den zweitkürzesten Abstand  $e_i$  von  $P_i P_{i+1}$  hat ( $e_i > d_i$ ). Ein dritter Punkt  $T_i$  von  $X_n$  in  $A_i$  liegt nun ohne Einschränkung in  $C_i \cap (Q_i S_i)$  und hat einen Abstand  $\cong e_i$  von  $P_i P_{i+1}$ . Wird  $T_i P_i$  um  $T_i$  nach links gedreht, so sei  $U$  der erste von  $T_i P_i$  in  $A_{i-1}$  vor  $P_{i-1}$  erreichte Punkt von  $X_n$ , oder  $U$  sei  $P_{i-1}$  selbst, wenn kein Punkt vorher in  $A_{i-1}$  erreicht wurde. Dann ist  $\{T_i, S_i, Q_i, P_i, U\}$  leer und konvex. – Sind also mehr als zwei Punkte von  $X_n$  in einem  $A_i$ , so gibt es immer ein konvexes Fünfeck mit Eckpunkten aus  $X_n$  ohne innere Punkte von  $X_n$ . An dieser Stelle ist also schon  $g(5) \leq 17$  bewiesen.

Etwa in  $A_i$  liegen nun genau zwei Punkte von  $X_n$ , nämlich  $Q_i$  und  $S_i$  (wie oben in  $B_i$  und in  $C_i$ ). Sind die konvexen Vierecke  $H_1 = \{S_i, Q_i, P_i, P_{i-1}\}$  und  $H_2 = \{Q_i, S_i, P_{i+2}, P_{i+1}\}$  beide ohne innere Punkte von  $X_n$ , so bilden  $H_1$  zusammen mit einem weiteren Punkt von  $X_n$ , der in  $(Q_i S_i) \cap (B_{i+1} \cup B_{i-1} \cup B_{i-2})$  liegt und kürzesten Abstand zu  $P_{i-1} S_i$  hat, oder entsprechend  $H_2$  zusammen mit einem weiteren Punkt von  $X_n$ , der in  $(S_i Q_i) \cap (B_{i-1} \cup B_{i+1} \cup B_{i+2})$  liegt und kürzesten Abstand zu  $S_i P_{i+2}$  hat, ein leeres konvexes Fünfeck. Es muss mindestens einen solchen weiteren Punkt von  $X_n$  geben, da alle Bereiche  $B_j, j \neq i$ , ganz erfasst sind und da  $n \geq 10$ .

Liegt nun ohne Einschränkung etwa in  $H_1$  der Punkt  $Q_{i-1}$  von  $X_n$ , dann kann in  $H_2$  kein Punkt von  $X_n$  liegen, denn  $S_i$  aus  $B_i$  ist im Fall  $H_1 \cap B_{i-1} \neq \emptyset$  notwendig in  $(P_{i-2} P_{i-1})$  und im Fall  $H_2 \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  notwendig in  $(P_{i+2} P_{i-2})$ , was im Widerspruch zu  $B_i \cap (P_{i-2} P_{i-1}) \cap (P_{i+2} P_{i-2}) = \emptyset$  steht. Wie oben ergibt dann ein Punkt in  $B_{i-1} \cap (S_i Q_i)$ , in  $B_{i+1}$  oder in  $B_{i+2}$ , der kürzesten Abstand zu  $S_i P_{i+2}$  hat, zusammen mit  $H_2$  ein leeres konvexes Fünfeck.

Ausser in  $B_{i-1} \cap (S_i Q_i)$  kann nun  $S_{i-1}$  noch in  $C_{i-1} \cap (Q_{i-1} S_i)$  oder in  $C_{i-1} \cap (S_i Q_{i-1})$  liegen. Im ersten Fall ist  $\{S_{i-1}, S_i, Q_i, P_i, Q_{i-1}\}$  und im zweiten Fall  $\{S_i, S_{i-1}, Q_{i-1}, P_{i-1}, P_{i-2}\}$  ein leeres konvexes Fünfeck, weil kein weiterer Punkt von  $X_n$  in  $B_{i-1}$  liegt und weil  $(S_i P_{i-2}) \cap B_{i-2} = \emptyset$  [das zweite Fünfeck liegt ganz in  $\{S_i, P_{i+2}, P_{i-2}\}$ ,

aber  $B_{i-2}$  liegt in  $(P_{i+2}P_{i-2})$ . Liegt schliesslich nur  $Q_{i-1}$  in  $B_{i-1}$  (und in  $H_1$ ), so bildet  $\{Q_{i-2}, S_i, Q_{i-1}, P_{i-1}, P_{i-2}\}$  ein leeres konvexes Fünfeck. – Es ist damit jetzt  $g(5) \leq 12$  bewiesen, da zwei Punkte von  $X_n$  in einem  $A_i$  immer mindestens ein konvexes Fünfeck ohne innere Punkte von  $X_n$  zur Folge hatten.

Wegen  $n \geq 10$  kann zum Abschluss nun etwa in  $B_{i+2}, B_{i+1}, B_i$  und  $B_{i-1}$  jeweils genau ein Punkt  $Q_{i+2}, Q_{i+1}, Q_i$  und  $Q_{i-1}$  von  $X_n$  angenommen werden. Sowohl  $B_{i+2}$  als auch  $B_{i-1}$  liegen ganz in  $(P_{i-2}P_{i-1})$ . Da  $G_{i+1}$  und  $G_{i-1}$  konvex sind, liegen  $B_{i+2}$  ganz in  $(P_{i+1}M)$  und  $B_{i-1}$  ganz in  $(MP_{i+1})$ . Von  $Q_iQ_{i+1}$  wird  $MP_{i+1}$  in  $(P_{i-1}P_{i-2})$  geschnitten, so dass ohne Einschränkung etwa  $B_{i-1}$  ganz in  $(Q_iQ_{i+1})$  liegt und dann  $\{Q_i, Q_{i+1}, P_{i+1}, P_i, Q_{i-1}\}$  ein leeres konvexes Fünfeck bildet. – Damit gilt  $g(5) \leq 10$ , und der Satz ist bewiesen.

Heiko Harborth, Braunschweig

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P. Erdős: Briefliche Mitteilung.
- 2 P. Erdős: On some problems of elementary and combinatorial geometry. *Annali Mat.*, series IV, V, 103, 99–108 (1975).
- 3 P. Erdős und G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.* 2, 463–470 (1935).
- 4 P. Erdős und G. Szekeres: On extremum problems in elementary geometry. *Ann. Univ. Sci. Budapest* 3, 53–62 (1960).
- 5 J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: On the maximum number of coplanar points containing no convex  $n$ -gons. Unveröffentlichtes Manuskript.
- 6 J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: A combinatorial problem on convex  $n$ -gons. In: *Proc. Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, S. 180–188. Baton Rouge 1970.

## Aufgaben

**Aufgabe 792.** Man zeige, dass die folgende Konstruktionsaufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist: Ein Dreieck aus den gegebenen Seiten  $b$  und  $c$  zu konstruieren, welches die Eigenschaft hat, dass die Seitenhalbierende von  $a$ , die Höhe auf  $b$  sowie die Winkelhalbierende von  $C$  konkurrent sind.

E. Trost, Zürich  
H. Kappus, Rodersdorf

**Lösung:** Die in der Aufgabe genannte Konkurrenzbedingung werde kurz «Bedingung  $P$ » genannt. Wählen wir das kartesische Koordinatensystem so, dass

$$A = (b, 0), \quad B = (p, q), \quad C = (0, 0) \quad \text{mit} \quad b, p, q > 0,$$

so lauten die Gleichungen für die die Strecken  $h_b, s_a, w_c$  enthaltenden Geraden: