

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 6

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned}
\text{Var}[W_n] &= \text{Var}[U_n] + \frac{1}{4} \text{Var}[V_n] + E[U_n V_n] - E[U_n]E[V_n] \\
&= 2n\pi^{-1} \int_0^1 [\ln(q)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(1-q^2)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + 2n(\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(q)] [\ln(1-q^2)] [1-q^2]^{-1/2} dq - 2n[\ln(2)]^2 \\
&= n\pi^2 [6]^{-1} - 2n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi^{1/2})^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \nu^{-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) [\Gamma(\nu+1)]^{-1} \left[ \psi(\nu+1) - \psi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \right] \right) \\
&= n\sigma_{BA}^2.
\end{aligned}$$

For the transformations the formulae (6.3.2), (6.3.3), (6.4.2), (6.4.4) and (23.2.24) of [1], p. 258, 260, 807, and the formulae (4.256), [4.261 (17)] and [4.261 (21)] of [3], p. 539, 541, were used.

F. Streit, Genève

#### REFERENCES

- 1 M. Abramowitz and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York 1970.
- 2 J. Bertrand: Calcul des probabilités, p. 4-5. Gauthier-Villars, Paris 1907.
- 3 I.S. Gradshteyn and I.W. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York 1965.
- 4 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, chap. 6. Springer, Berlin 1957.
- 5 M.G. Kendall and P.A.P. Moran: Geometrical Probability, p. 9, 10. Griffin, London 1963.
- 6 E.L. Lehmann: Testing Statistical Hypotheses, p. 63-68. Wiley, New York 1966.
- 7 L.A. Santaló: Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading 1976.
- 8 L. Schmetterer: Einführung in die mathematische Statistik, p. 127. Springer, Wien 1966.
- 9 F. Streit: On Methods and Problems of Geometrical Stochastics. Bull. ISI 46 (2), 600-605 (1976).
- 10 B.L. van der Waerden: Mathematische Statistik, p. 251-258. Springer, Berlin 1965.

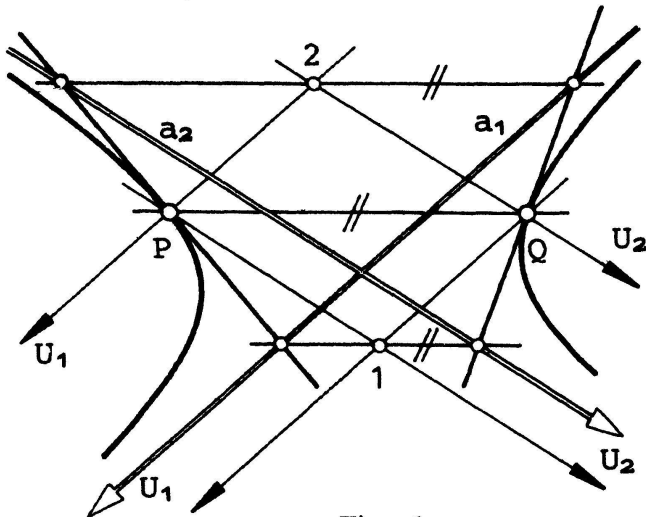
## Kleine Mitteilungen

### Eine Asymptotenkonstruktion der Hyperbel

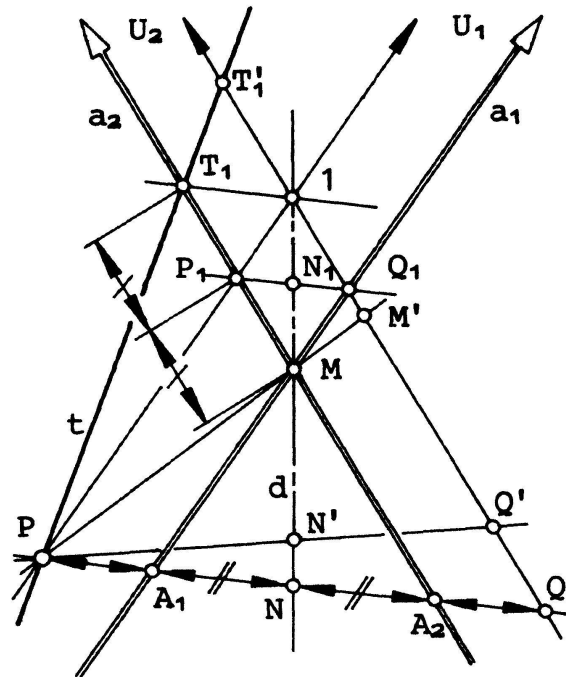
Den allgemein bekannten affinen Eigenschaften der Hyperbel<sup>1)</sup> sei mit diesem Beitrag noch eine weitere hinzugefügt, die zur raschen Konstruktion der Asymptoten einer Hyperbel herangezogen werden kann. Diese Eigenschaft lautet:

1) Siehe Literaturangabe.

Werden die Endpunkte  $P, Q$  einer Hyperbelsehne mit den Fernpunkten  $U_1, U_2$  der Hyperbel verbunden und durch die Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden Parallele zu  $PQ$  gelegt, so treffen diese Parallelen die Tangenten von  $P, Q$  in Punkten der Asymptoten  $a_1, a_2$  (Fig. 1).



Figur 1



Figur 2

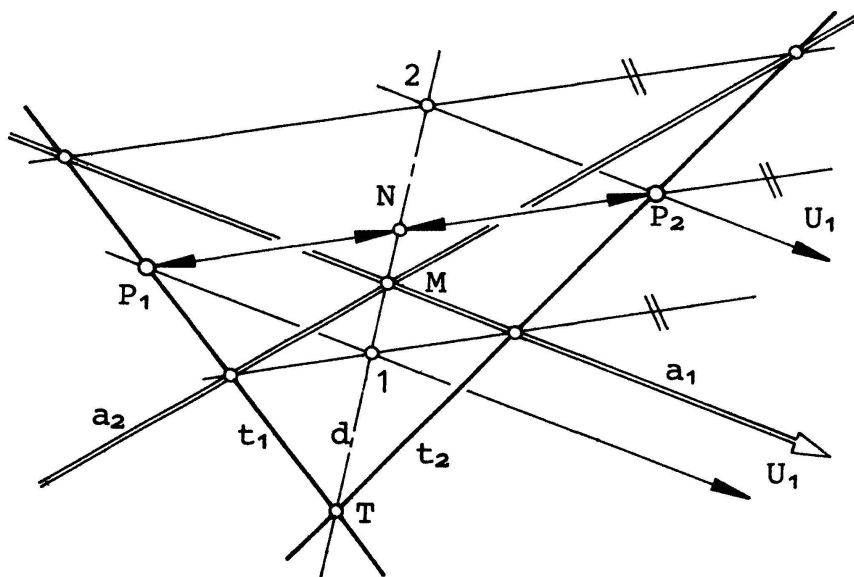
Für diese Eigenschaft folgt nun ein *elementarer Beweis*:

Der zur Sehne  $PQ$  konjugierte Durchmesser  $d$  enthält den Sehnenmittelpunkt  $N$  (Fig. 2). Trifft  $PQ$  die Asymptoten  $a_1, a_2$  in  $A_1, A_2$ , so gilt bekanntlich  $\overline{PA_1} = \overline{A_2Q}$ . Bei Streckung von  $A_1$  nach  $P$  aus  $N$  gelangen die Asymptoten  $a_1, a_2$  nach  $PU_1$  bzw.  $QU_2$  und damit der Hyperbelmittelpunkt  $M$  in den Schnittpunkt 1 von  $PU_1$  mit  $QU_2$ ; 1 liegt daher auch auf  $d$ . Ist  $P_1$  Schnittpunkt von  $PU_1$  mit  $a_2$ ,  $Q_1$  Schnittpunkt von  $QU_2$  mit  $a_1$ , so liegt mit  $MP_1Q_1$  ein Parallelogramm vor, dessen Mittelpunkt  $N_1$  Schnittpunkt von  $d$  mit  $P_1Q_1$  ist. Wegen  $\overline{P_1N_1} = \overline{N_1Q_1}$  und  $\overline{PN} = \overline{NQ}$  sind die Sehnen  $PQ$  und  $P_1Q_1$  zentrisch ähnlich bezüglich 1 zugeordnet, d. h.  $P_1Q_1$  liegt parallel zu  $PQ$ . (Anm.: Die Parallelität von  $PQ$  und  $P_1Q_1$  lässt sich auch ohne Verwendung der zentrischen Ähnlichkeit allein mittels der Strahlensätze folgern. Bei indirekter Annahme  $PQ \not\parallel P_1Q_1$  gäbe es nämlich eine zu  $P_1Q_1$  parallele von  $PQ$  verschiedene Gerade durch  $P$ , aus welcher von  $1P, d$  und  $1Q$  ebenfalls längengleiche Strecken  $\overline{PN'}$  und  $\overline{N'Q'}$  ausgeschnitten werden. Daraus folgt  $1Q = QQ' \parallel d$ , was einen Widerspruch bedeutet.) Bekanntlich wird das innerhalb der Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente durch den Berührungspunkt halbiert. Bei Projektion dieser längengleichen Tangentenstrecken längs einer Asymptote auf die andere erhält man daher wieder längengleiche Strecken. Für den Schnittpunkt  $T_1$  von  $a_2$  mit  $t$  gilt daher  $\overline{MP_1} = \overline{P_1T_1}$ . Berücksichtigt man ausserdem noch  $\overline{MN_1} = \overline{N_11}$ , so folgt daraus  $T_11 \parallel P_1Q_1$ .

**Bemerkung:** Seien  $T'_1$  und  $M'$  die Projektionen von  $T_1, M$  aus  $P$  auf  $QU_2$ , so ist  $\overline{T'_11} = \overline{1M'}$ . Die Übertragung der Strecke  $\overline{T'_11}$  nach  $\overline{1M'}$  liefert daher mit  $PM'$  einen weiteren Hyperbeldurchmesser.

Die Verwendbarkeit dieser Hyperbeleigenschaft zur Konstruktion der Asymptoten wird nun anhand zweier Beispiele gezeigt.

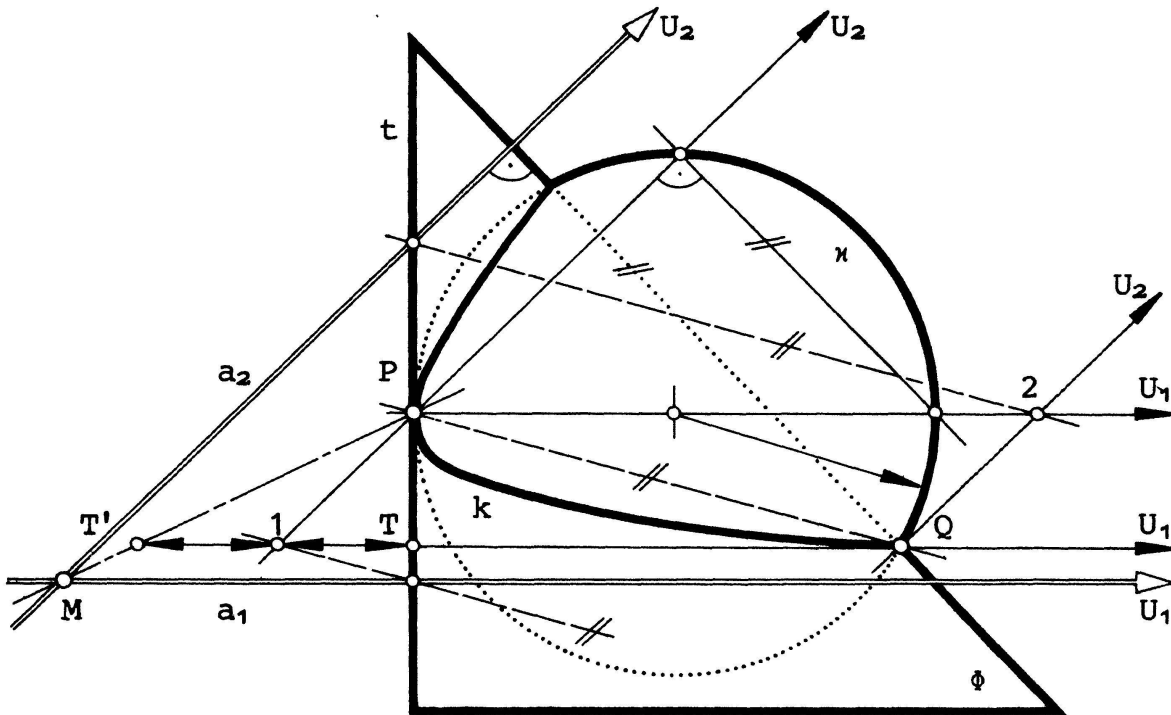
**Beispiel 1.** Von einer Hyperbel sind zwei Linienelemente  $(P_1, t_1)$ ,  $(P_2, t_2)$  sowie ein Fernpunkt  $U_1$  bekannt. Der durch den Tangentenschnittpunkt  $T$  und den Mittelpunkt  $N$  der Sehne  $P_1P_2$  bestimmte zu  $P_1P_2$  konjugierte Durchmesser  $d$  trifft  $P_1U_1$  und  $P_2U_1$  in 1, 2 (Fig.3). Werden nun durch 1, 2 die Parallelen zu  $P_1P_2$  gelegt und diese mit  $t_1, t_2$  zum Schnitt gebracht, dann liegen mit den noch fehlenden beiden Verbindungsgeraden der vier Schnittpunkte die Asymptoten  $a_1, a_2$  vor.



Figur 3

**Beispiel 2.** Eine Kugel  $\kappa$  und ein schiefer Kreiskegel  $\Phi$  mögen eine gemeinsame Symmetrieebene  $\pi$  besitzen und sich in einem Punkt  $P$  berühren (Fig.4). Die Durchdringungskurve von  $\kappa$  und  $\Phi$  erscheint dann im Normalriss auf  $\pi$  i. a. als doppelt überdeckte Kurve 4.0., also als ein Kegelschnitt  $k$ . Zur Bestimmung der Fernpunkte von  $k$  bringt man zwei kongruente und in parallelen Ebenen liegende Kreisschnitte von  $\kappa$  und  $\Phi$  durch eine geeignete Schiebung zur Deckung. Nach Ausübung der Schiebung zerfällt die Durchdringungskurve in ein Kreispaar,  $k$  selbst in ein Paar asymptotenparalleler Geraden; somit erhält man die Hyperbelfernpunkte  $U_1, U_2$ . Die Kegelerzeugende  $t$  durch  $P$  bildet zusammen mit  $P$  ein Linienelement von  $k$ . Zwei weitere Hyperbelpunkte liefert der Schnitt der zweiten in  $\pi$  liegenden Kegelerzeugenden mit dem in  $\pi$  liegenden Kugelgrosskreis; für die folgende Konstruktion wird jedoch nur einer dieser Schnittpunkte  $Q$  benötigt. Man legt nun durch die beiden Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden von  $P, Q$  mit  $U_1, U_2$  die Parallelen zu  $PQ$  und sucht deren Schnittpunkte mit  $t$ ; damit hat man je einen Punkt der Asymptoten  $a_1, a_2$  gefunden. Wird der Schnittpunkt  $T$  von  $QU_1$  mit  $t$  an 1 nach  $T'$  gespiegelt, so ist mit  $PT'$  auch ein Durchmesser von  $k$  bekannt.

**Bemerkung:** Man beachte, dass die gezeigte Asymptotenkonstruktion die Kenntnis



Figur 4

des Hyperbelmittelpunkts  $M$  nicht voraussetzt und daher auch dann verwendet werden kann, wenn  $M$  auf der Zeichenfläche unerreichbar sein sollte.

H. Hohenberger, Graz

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F. Hohenberg: Konstruktive Geometrie in der Technik, 3.Aufl., S.57f. Wien 1966.
- 2 K. Strubecker: Einführung in die Höhere Mathematik, Bd. 1, S.413f. München 1966.
- 3 K. Strubecker: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2.Aufl., S.220. Göttingen 1967.
- 4 W. Wunderlich: Darstellende Geometrie 1, S.74f. Wien 1966.

**Vanishing sums of roots of unity**

The following theorem is well known {see [4] and [7]. Related results are contained in [3] and [5]. It was considerably sharpened by Conway and Jones ([1], theorem 5)}.

*Denote by  $p_1$  the least prime divisor of the integer  $q > 1$ . If  $n < p_1$ , then any  $n$  distinct  $q$ -th roots of unity  $\rho_1, \dots, \rho_n$  are linearly independent over the field  $\mathbb{Q}$  of rational numbers.*

In this note a further proof is given, which could be called arithmetical. Assume that

$$b_1\rho_1 + \dots + b_n\rho_n = 0, \quad b_v \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Denote by  $\zeta$  a primitive  $q$ -th root of unity. Applying the automorphisms of the Galois group of the field extension  $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$  to equation (1), we get

$$\beta(k) := b_1 \rho_1^k + \cdots + b_n \rho_n^k = 0, \quad (2)$$

if  $k$  is any integer prime to  $q$ . Hence

$$f(u) := \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q \zeta^{uk} \beta(k) = 0 \quad (3)$$

for any integer  $u$ . On the other hand, if  $\rho_v = \exp(2\pi i a_v \cdot 1/q)$  and  $\zeta = \exp(2\pi i \cdot 1/q)$ , we deduce from (2), that

$$f(u) = \sum_{v=1}^n b_v \cdot c_q(a_v + u), \quad (4)$$

where

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} n\right) = \sum_{d|(q,n)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

denotes Ramanujan's sum. The properties of Ramanujan's sum, needed in this note (essentially the multiplicativity of  $q \mapsto c_q$ ) may be found in [2]. Without loss of generality assume  $|b_1| = \max_v |b_v|$ , and choose  $u \equiv -a_1 \pmod{q}$ .

The  $a_v$  are different modulo  $q$ , therefore

$$-a_1 + a_v \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{for } v=2, \dots, n.$$

Thus, for any  $v \geq 2$ , there is a prime power<sup>1)</sup>  $p^r \parallel q$  such that at most the power  $p^{r-1}$  divides  $u + a_v$ . Notice that

$$c_{p^r}(n) = \begin{cases} \varphi(p^r) & \text{if } p^r | n, \\ -p^{r-1} & \text{if } p^{r-1} \parallel n, \\ 0 & \text{if } p^{r-1} \nmid n, \end{cases}$$

whence by the multiplicativity of  $c_q$

$$|c_q(u + a_v)| \leq p^{r-1} \cdot \varphi\left(\frac{q}{p^r}\right) \leq \frac{\varphi(q)}{p-1} \leq \frac{\varphi(q)}{p_1-1} \quad (6)$$

for  $v=2, \dots, n$ . From (3), (4) and (6) we obtain

1)  $p^r \parallel q$  means:  $p^r$  divides  $q$ , but  $p^{r+1}$  does not.

$$\begin{aligned}
0 = |f(u)| &\geq |b_1| c_q(q) - |b_1| \cdot \sum_{v=2}^n |c_q(a_v - a_1)| \\
&\geq |b_1| \cdot \left\{ \varphi(q) - \frac{n-1}{p_1-1} \cdot \varphi(q) \right\} \\
&\geq |b_1| \cdot \varphi(q) \cdot \frac{1}{p_1-1}.
\end{aligned}$$

Therefore  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ , and the theorem is proved.

Wolfgang Schwarz, Frankfurt am Main

Š. Porubský informed me that another simple proof of the theorem of this note and a discussion of its connections with covering systems is given in M. Newman: Roots of unity and covering sets. *Math. Ann.* 191, 279–282 (1971).

#### REFERENCES

- 1 J.H. Conway and A.J. Jones: Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity). *Acta Arith.* 30, 229–240 (1976).
- 2 G.H. Hardy and E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford 1968.
- 3 H.B. Mann: On linear relations between roots of unity. *Mathematika*, Lond. 12, 107–117 (1965).
- 4 L. Rédei: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerungen des Hauptsatzes von Hajós. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 16, 329–373 (1965).
- 5 I.J. Schoenberg: A note on the cyclotomic polynomial. *Mathematika*, Lond. 11, 131–136 (1964).
- 6 B.L. van der Waerden: *Algebra I*. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1966.
- 7 E. Wittmann: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln. *El. Math.* 26, 42–43 (1971).

## Elementarmathematik und Didaktik<sup>1)</sup>

### Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck

Die folgende Aufgabe, die in der Thematik und in den Behandlungsmethoden mehrfach verallgemeinerungsfähig ist, bis hin zur Nutzung in manchen Anwendungsbereichen, kann auch bereits für sich Interesse finden, sowohl als Frage wie auch wegen der Eigenart des Ergebnisses.

**Aufgabe.** Gegeben sei in der euklidischen Ebene ein beliebiges Dreieck  $ABC$ . Gesucht ist eine in dem Sinne optimale Kreisfläche  $K$ , dass zwischen ihr und der Dreiecksfläche  $D$  die symmetrische Differenz

$$(K \cup D) \setminus (K \cap D)$$

möglichst kleinen Flächeninhalt  $F$  hat.

<sup>1)</sup> Die für diese Sparte bestimmte Erweiterung des Umfangs von 2 Heften pro Jahrgang um je 8 Seiten wird durch die Deutschschweizerische Mathematik-Kommission (DMK) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer (VSMP) finanziert.