Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 33 (1978)
Heft: 6

Artikel: Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten
Autor: Knup, Emil
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32949

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

winkligen Dreiecken D im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Natürlich gibt es auch Dreiecke mit konstruierbarem K; z. B. lässt sich, wenn einer der Winkel α, β, γ gleich 135° ist, die Konstruktion des Falles **(A)** auch noch anwenden und führt auf denselben Kreis wie nach dem Verfahren aus **(B)**. Ferner wird $f(x)$ beispielsweise für $a=b$ (gleichschenklige D) reduzibel, nämlich teilbar durch $x+c$. Wir erwähnen insbesondere als ein pointiertes Gegenstück zu Satz 6:

Satz 7. *Ist ABC gleichschenklig und bei C rechtwinklig, so teilt der Mittelpunkt Z des optimalen Kreises die Höhe CY im Verhältnis* $CZ:ZY=(1/2)(1+\sqrt{5})$ *des «Goldenen Schnittes».*

In der Tat rechnet man nach, dass für den Kreis mit diesem Mittelpunkt Z und dem Radius $CY \cdot \sqrt{\sqrt{5}-2}$ die Bedingung (H) erfüllt ist (Abb. 6).

Ludwig Stammler, Halle (Saale), DDR

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Stammler und B. Weissbach: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beitr. Alg. Geom. *8*, im Druck.
2 L. Stammler und U. Matte: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval. Beitr. Alg. Geom. *9*, im Druck.
3 A. Rosenfeld: Aufgabe E2632. Lösung von J. Oman. Am. Math. Monthly *85*, 280 (1978).

Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten

Von der Schule her kennt man das Dreieck mit den Seiten 4, 5, 6, in welchem überraschenderweise ein Winkel genau doppelt so gross ist wie ein anderer. Die Frage liegt nahe, ob vielleicht noch weitere solche Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden Seiten a, b, c und der Winkelbeziehung $\beta=2\alpha$ existieren. Im nachfolgenden Abschnitt a werden unter alleiniger Verwendung des Sinussatzes alle derartigen Dreiecke bestimmt.

Es erhebt sich die nächste Frage: Gibt es auch Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden a, b, c und $\beta=3\alpha$? Im Abschnitt b wird auch für diese Dreiecke die entsprechende Parameterdarstellung hergeleitet.

Die gleiche Fragestellung für die Fälle $\beta=4\alpha, 5\alpha, \ldots, k\alpha$ wird im letzten Abschnitt c weiterverfolgt; die Formeln (5) geben die allgemeine Lösung des aufgeworfenen Problems.

Einen andern Weg zur Lösung der vorliegenden Aufgabe hat J. T. Groenman, Groningen (NL) eingeschlagen; anstelle des Sinussatzes verwendet er weitgehend elementargeometrische Überlegungen. Seine Lösung erscheint in «Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde».

a) $\beta=2\alpha$. Der Sinussatz ergibt für die Seitenverhältnisse:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}=2\cos\alpha\,, \qquad \frac{c}{a}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}=4\cos^2\alpha-1\,.$$

$$\frac{b}{a} = \text{rational} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ teilerfremd aus } \mathbf{N}).$$

Mit diesem Ansatz wird $c/a = (m^2 - n^2)/n^2$, dazu $b/a = mn/n^2$, somit

$$a = n^2, \qquad b = mn, \qquad c = m^2 - n^2 \tag{1}$$

$\alpha + \beta < 180° \Rightarrow 0° < \alpha < 60°$, $1/2 < \cos\alpha = m/2n < 1$ oder $n < m < 2n$.

$n = 2, 3, 4, \ldots$ ist frei wählbar. m muss zwischen n und $2n$ liegen und zu n teilerfremd sein. Es gibt unendlich viele Dreiecke der gewünschten Art (siehe Liste im nächsten Abschnitt).

b) $\beta = 3\alpha$. Die gleiche Methode wie oben führt auch hier zum Ziel: Man benützt zweimal den Sinussatz, drückt beide Quotienten durch $\cos\alpha$ aus und verwendet wiederum den Ansatz $2\cos\alpha = m/n$.

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos^2\alpha - 1 = \frac{m^2 - n^2}{n^2} = \frac{n(m^2 - n^2)}{n^3},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 2) = \frac{m}{n} \cdot \frac{m^2 - 2n^2}{n^2},$$

somit

$$a = n^3, \qquad b = n(m^2 - n^2), \qquad c = m(m^2 - 2n^2) \tag{2}$$

$\alpha + \beta < 180° \Rightarrow 0° < \alpha < 45°$, $\sqrt{2}/2 < \cos\alpha = m/2n < 1$ oder $n\sqrt{2} < m < 2n$.

$n = 2, 3, 4, \ldots$ Damit a und c teilerfremd werden, sind für m nur die zu n teilerfremden Werte zu wählen. Es gibt wieder unendlich viele Dreiecke dieser Art.

Dreiecke mit $\beta = 2\alpha$ bis $n = 5$

n	m	a	b	c
2	3	4	6	5
3	4	9	12	7
3	5	9	15	16
4	5	16	20	9
4	7	16	28	33
5	6	25	30	11
5	7	25	35	24
5	8	25	40	39
5	9	25	45	56

Dreiecke mit $\beta = 3\alpha$ bis $n = 6$

n	m	a	b	c
2	3	8	10	3
3	5	27	48	35
4	7	64	132	119
5	8	125	195	112
5	9	125	280	279
6	11	216	510	539

c) $\beta = 4\alpha, 5\alpha, \ldots, k\alpha$. Drückt man $\sin k\alpha/\sin\alpha$ für weitere Werte von k durch $\cos\alpha$ aus, so stösst man auf die Zahlen des Pascaldreiecks. Mit der Abkürzung $x = 2\cos\alpha$ erhält man nämlich

k	$\frac{\sin k a}{\sin a} = f_k(x)$
1	1
2	x
3	x^2-1
4	x^3-2x
5	x^4-3x^2+1
6	x^5-4x^3+3x
7	$x^6-5x^4+6x^2-1$
8	$x^7-6x^5+10x^3-4x$

Man vermutet die allgemeine Formel

$$\frac{\sin ka}{\sin a} = f_k(x) = \binom{k-1}{0} x^{k-1} - \binom{k-2}{1} x^{k-3} + \binom{k-3}{2} x^{k-5} - \binom{k-4}{3} x^{k-7} + - \cdots \tag{3}$$

Der Induktionsbeweis stützt sich auf die Identität

$$\sin(k+1)a + \sin(k-1)a = 2 \sin k a \cos a .$$

Die Division durch $\sin a$ ergibt

$$\frac{\sin(k+1)a}{\sin a} = x \cdot \frac{\sin k a}{\sin a} - \frac{\sin(k-1)a}{\sin a}.$$

Für die $f_k(x)$ gilt somit die Rekursionsformel

$$f_{k+1} = x \cdot f_k - f_{k-1}, \tag{4}$$

und dieser Anforderung genügt in der Tat die vermutete Beziehung (3):

$$\begin{aligned}
x \cdot f_k &= \binom{k-1}{0} x^k - \binom{k-2}{1} x^{k-2} + \binom{k-3}{2} x^{k-4} - \binom{k-4}{3} x^{k-6} + - \cdots \\
-f_{k-1} &= \qquad\quad - \binom{k-2}{0} x^{k-2} + \binom{k-3}{1} x^{k-4} - \binom{k-4}{2} x^{k-6} + - \cdots \\
\hline
x \cdot f_k - f_{k-1} &= \binom{k-0}{0} x^k - \binom{k-1}{1} x^{k-2} + \binom{k-2}{2} x^{k-4} - \binom{k-3}{3} x^{k-6} + - \cdots \\
&= f_{k+1} .
\end{aligned}$$

Setzt man nun wieder wie früher $2\cos\alpha = x = m/n$ (m, n teilerfremd aus $\mathbf{N}$), so erhält man die Seiten a_k, b_k, c_k der Dreiecke mit $\beta = k\alpha$:

$$a_k = n^k$$

$$b_k = n\left[\binom{k-1}{0} m^{k-1} - \binom{k-2}{1} m^{k-3} n^2 + \binom{k-3}{2} m^{k-5} n^4 - + \cdots\right]$$

$$c_k = \binom{k}{0} m^k - \binom{k-1}{1} m^{k-2} n^2 + \binom{k-2}{2} m^{k-4} n^4 - + \cdots \tag{5}$$

Offensichtlich sind a_k und c_k teilerfremd; es liegen somit Grundtripel vor. Dass für x nur rationale Werte in Frage kommen, geht aus dem Kosinussatz hervor:

$$x = 2\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \qquad (a, b, c \text{ aus } \mathbf{N}).$$

Mit den Formeln (5) erhält man daher alle gesuchten Dreiecke.

$\alpha + \beta < 180° \Rightarrow 0° < \alpha < 180°/k + 1 = \alpha_k$, $\cos\alpha_k < \cos\alpha = m/2n < 1$ oder $2n \cos\alpha_k < m < 2n$. Damit in diesem Intervall wenigstens ein ganzzahliges m existiert, muss $2n\cos\alpha_k < 2n - 1$ sein oder $n > 1/2\,(1 - \cos\alpha_k)$.
Die beiden sicher teilerfremden Parameter n und $m = 2n - 1$ liefern dann eine brauchbare Lösung. Auch bei sehr grossen k und daher sehr kleinen α_k gibt es beliebig viele passende Paare n, m. Es gibt somit unendlich viele Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und $\beta = k\alpha$ für jedes k aus $\mathbf{N}$.
Formeln für $k = 4$ und 5:

$\beta = 4\alpha$
$a = n^4$
$b = mn(m^2 - 2n^2)$
$c = m^4 - 3m^2n^2 + n^4$

$\beta = 5\alpha$
$a = n^5$
$b = n(m^4 - 3m^2n^2 + n^4)$
$c = m(m^2 - n^2)(m^2 - 3n^2)$

Dreiecke mit $\beta = 4\alpha$

n	m	a	b	c
3	5	81	105	31
4	7	256	476	305
5	9	625	1395	1111

Dreiecke mit $\beta = 5\alpha$

n	m	a	b	c
4	7	1024	1220	231
5	9	3125	5555	3024
6	11	7776	17214	12155

Emil Knup, St. Gallen