Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 3

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Remarks: It is easy to notice that $((\varphi-e)*(d-e))\ (n)=0$ holds iff $n=1$ or n is a prime number. Hence $\sigma(n)>\varphi(n)+d(n)$ iff n is a composite number. We can get the inequality (2.1) from the relation $\sigma=\varphi*d$ also as follows: if $n>1$ then

$$\sigma(n)=\sum_{k\mid n}\varphi(k)\,d(n/k)\geqslant\varphi(1)\,d(n)+\varphi(n)\,d(1)=\varphi(n)+d(n).$$

The second inequality is due to Makowski [2]:

2.2. For $n, k\geqslant 1$ we have $\varphi_k(n)+\sigma_k(n)\geqslant 2n^k$.

Proof: From the relations (6) and (3) we have

$$\varphi_k+\sigma_k-2I_k=\varphi_k+(\varphi_k*d)-(\varphi_k*2I)=\varphi_k*(e+d-2I).$$

Applying the lemma we obtain inequality (2.2) immediately.

Remark: As (2.1) it is easy to verify that the strong inequality $\varphi_k(n)+\sigma_k(n)>2n^k$ holds iff n is a composite number.

The third inequality is due to Makowski [2]:

2.3. If $k\geqslant 1, n>1$ then $\varphi_k(n)+\sigma_k(n)\leqslant n^k d(n)$.

Proof: If suffices to prove the inequality

$$\varphi_k I_{-k}+\sigma_k I_{-k}\leqslant d+e.$$

Using the relations (1), (2), (4), (5) and the lemma we have

$$d+e-\sigma_k I_{-k}-\varphi_k I_{-k}=I*\left((I+\mu)-(I+\mu)I_{-k}\right)=I*\left((I+\mu)(I-I_{-k})\right)\geqslant\Theta$$

and (2.3) follows.

J. Rutkowski, Poznań, Poland

REFERENCES

1 H. das Bagchi and M. Gupta: Problem 343. Jber. Dt. Math. Verein. *57*, 8–9 (italics) (1954).
2 A. Makowski: Problem 339. El. Math. *15*, 39–40 (1960).

Aufgaben

Aufgabe 804. Man bestimme die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze eines regulären Ikosaeders. [Vgl. M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen

Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. El. Math. *30*, 73-83 (1975).]

Ch. Hippenmeyer, Basel

Lösung des Aufgabenstellers: Es bezeichne $\mathfrak{G}_I$ den Eckpunkt-Kanten-Graphen des regulären Ikosaeders, $\mathbf{G}_I$ die Menge der Gerüste von $\mathfrak{G}_I$, $\mathfrak{D}_I^{(G)}$ die durch die Ikosaederdrehgruppe auf der Menge $\mathbf{G}_I$ induzierte Permutationsgruppe.
Die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze beim regulären Ikosaeder stimmt überein mit der Anzahl der Äquivalenzklassen auf $\mathbf{G}_I$ in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{D}_I^{(G)}$ (Anzahl der Muster in $\mathbf{G}_I$ bezüglich $\mathfrak{D}_I^{(G)}$).

Die Gruppe $\mathfrak{D}_I^{(G)}$ besteht aus 5 Klassen von unter sich konjugierten Elementen, nämlich der

Klasse K_1, herrührend von der Identität in der Drehgruppe (1),
Klasse K_2, herrührend von den Drehungen der Ordnung 2 (15),
Klasse K_3, herrührend von den Drehungen der Ordnung 3 (20),
Klasse K_4, herrührend von den Drehungen mit dem Winkel $\vartheta = 2\pi/5$ (12).
Klasse K_5, herrührend von den Drehungen mit dem Winkel $\vartheta = 4\pi/5$ (12).

Greift man aus jeder Klasse ein Element heraus, dann erhält man ein Repräsentantensystem

$$\{\omega_1 = \varepsilon, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}.$$

Aufgrund des Satzes von Burnside beträgt dann die Anzahl der Muster

$$t(\mathfrak{D}_I^{(G)}) = \frac{1}{60}\left(\chi(\varepsilon) + 15\chi(\omega_2) + 20\chi(\omega_3) + 12\chi(\omega_4) + 12\chi(\omega_5)\right).$$

$\chi(\omega)$ bezeichnet die Anzahl der Fix-Gerüste bei der Permutation ω (Charakter von ω). Insbesondere ist $\chi(\varepsilon)$ die Anzahl aller Gerüste von $\mathfrak{G}_I$. Nach dem Satz von Kirchhoff-Trent kann diese aus der Admittanz-Matrix von $\mathfrak{G}_I$ gewonnen werden. Bei geeigneter Numerierung der 12 Eckpunkte des Polyeders ist

$$\chi(\varepsilon) = \begin{vmatrix}
5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{vmatrix} = 5\,184\,000.$$

Man findet weiter unter Berücksichtigung der Zyklenstruktur der betreffenden Permutationen

$$\chi(\omega_2) = 1440, \qquad \chi(\omega_3) = \chi(\omega_4) = \chi(\omega_5) = 0,$$

so dass

$$t(\mathfrak{D}_I^{(G)}) = \frac{1}{60}(5\,184\,000 + 15 \cdot 1440) = 86\,760.$$

Bei Zugrundelegung der vollen Symmetrie-Gruppe des Ikosaeders (inkongruente Netze bei beidseitig verschieden gefärbtem Papier) beträgt die Anzahl der Muster

$$t(\mathfrak{G}_I^{(G)}) = \frac{1}{120}(5\,184\,000 + 15 \cdot 1440) = 43\,380.$$

Man schliesst daraus, dass keine ebenen Netze mit einer Symmetrieachse vorhanden sind.

Aufgabe 805. Man bestimme für $z \in C$ mit $\mathrm{Re}(z) \neq 0$

$$g = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\sum_{m=0}^{[n/2]} \binom{n}{2m} z^m \right) \left(\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2m+1} z^m \right)^{-1} \right\}.$$

L. Hämmerling, Aachen, BRD

Lösung mit Verschärfung: Wir setzen für $n \in \mathbf{N}$:

$$h_n(z) := \sum_{m=0}^{[n/2]} \binom{n}{2m} z^m \quad \text{und} \quad k_n(z) := \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2m+1} z^m; \tag{1}$$

damit rechnet man leicht die Gültigkeit von

$$2h_n(z) = (1+z^{1/2})^n + (1-z^{1/2})^n \quad \text{und} \quad 2z^{1/2}k_n(z) = (1+z^{1/2})^n - (1-z^{1/2})^n \tag{2}$$

nach. Ist $z \in \mathbf{C}$ so, dass $k_n(z) = 0$ gilt, so ist wegen (2) sicher $z^{1/2} \neq 1$ und $((1+z^{1/2})/(1-z^{1/2}))^n = 1$, also

$$\frac{1+z^{1/2}}{1-z^{1/2}} = e^{2\pi i k/n} \tag{3}$$

mit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Hier kann aber $k=0$ wegen $z \neq 0$ [siehe (1)] ausgeschlossen werden; ebenso $k = n/2$, wenn n gerade ist [siehe (3)]. Aus (3) folgt weiter $z^{1/2} = i\,\mathrm{tg}\,\pi k/n$, also $z = -\mathrm{tg}^2 \pi k/n$ mit einem $k \in \{1, \dots, [(n-1)/2]\}$. Man prüft an-

dererseits leicht nach, dass diese z-Werte tatsächlich die $[(n-1)/2]$-Nullstellen des Polynoms k_n sind, die daher sämtliche einfach sein müssen.
Sei nun $z \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_{\leqslant 0}$; dann ist also $k_n(z) \neq 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und nach (2) bei $n \to \infty$

$$\frac{h_n(z)}{k_n(z)} = z^{1/2} \frac{(1+z^{1/2})^n + (1-z^{1/2})^n}{(1+z^{1/2})^n - (1-z^{1/2})^n} \to$$

$$\begin{cases} z^{1/2}, & \text{falls} \quad |1+z^{1/2}| > |1-z^{1/2}|, \\ -z^{1/2}, & \text{falls} \quad |1+z^{1/2}| < |1-z^{1/2}|. \end{cases} \tag{4}$$

Wir beachten, dass aus $|1+z^{1/2}| = |1-z^{1/2}|$ direkt $\operatorname{Re} z^{1/2} = 0$, also $z \in \mathbf{R}_{\leqslant 0}$ folgt; aus unserer Voraussetzung über z ergibt sich daher $|1+z^{1/2}| \neq |1-z^{1/2}|$, und aus (4) schliesst man endgültig auf

$$g := \lim_{n\to\infty} \frac{h_n(z)}{k_n(z)} = z^{1/2} \operatorname{sgn} \operatorname{Re} z^{1/2} \quad \text{bei} \quad z \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_{<0}. \tag{5}$$

Dass (5) noch für $z=0$ gilt, sieht man aus (1) direkt. Übrigens ist die rechte Seite in (5) für jedes der fraglichen z natürlich eindeutig bestimmt, gleichgültig, welche der beiden Bestimmungen der komplexen Wurzel man für $z^{1/2}$ wählt.
Wir zeigen schliesslich, dass der Grenzwert in (5) für kein $z \in \mathbf{R}_{<0}$ existiert: Für reelles negatives z ist $z^{1/2} = it$ mit reellem $t \neq 0$; $(1+z^{1/2})/(1-z^{1/2})$ ist vom Betrag 1, aber ungleich 1, also gleich $e^{2\pi i s}$ mit reellem $s \in (0,1)$. Nach (2) ist

$$2h_n(z) = (1-z^{1/2})^n (e^{2\pi i n s} + 1), \qquad 2z^{1/2} k_n(z) = (1-z^{1/2})^n (e^{2\pi i n s} - 1). \tag{6}$$

Sei jetzt s rational, etwa $s = p/q$ mit $p, q \in \mathbf{N}$; nach (6) ist $k_{rq}(z) = 0$, $h_{rq}(z) \neq 0$ für alle $r \in \mathbf{N}$, und somit kann für diese z der Grenzwert in (5) nicht existieren. Sei nun s irrational. Nach (6) ist

$$\frac{h_n(z)}{k_n(z)} = -\frac{i z^{1/2}}{\operatorname{tg} \pi n s} = \frac{t}{\operatorname{tg} \pi n s} \tag{7}$$

und nach dem Kroneckerschen Approximationssatz (vgl. [1], Kap. XXIII) gibt es bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Paare $(n_j, d_j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, $j = 1, 2, \ldots$ mit $n_1 < n_2 < \cdots$ und $|n_j s - d_j| < \varepsilon$. Schreiben wir $\varepsilon_j := n_j s - d_j$, so ist $|\varepsilon_j| < \varepsilon$ und $\operatorname{tg} \pi n_j s = \operatorname{tg} \pi \varepsilon_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, also mit (7): $h_{n_j}(z)/k_{n_j}(z) = t/\operatorname{tg} \pi \varepsilon_j$. Daher ist klar, dass für die jetzt noch betrachteten z die Folge $(h_n(z)/k_n(z))$ nicht einmal beschränkt ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 G.H. Hardy und E.M. Wright: An introduction to the theory of numbers, 2.Aufl. Clarendon Press, Oxford 1945.

Weitere Lösungen sandten A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Mollens VS), D. A. Overdijk (NL), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 806. Die Funktionen $f, g: [0,1] \to \mathbf{R}$ seien Riemann-integrabel, und f sei monoton fallend. Ferner sei

$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x g(t)\,dt \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1].$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare, monoton wachsende und konvexe Funktion $\Phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$\int_0^x \Phi(f(t))\,dt \leqslant \int_0^x \Phi(g(t))\,dt \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1].$$

Dies ist zu zeigen.

Aufgabe 806A. Man beweise die Aussage von Aufgabe 806 für beliebige monoton wachsende, konvexe Funktionen Φ.

C. Bandle, Basel

Lösung von Aufgabe 806A mit Verschärfung: Wir beweisen folgenden *Satz.* Sei $I := [0,1]$. Die Funktionen $f, g: I \to \mathbf{R}$ seien Riemann-integrabel, und f sei monoton fallend. Ferner sei für alle $x \in I$

$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x g(t)\,dt. \tag{1}$$

Dann gilt für jede konvexe Funktion $\Phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\int_0^x \Phi(g(t))\,dt - \int_0^x \Phi(f(t))\,dt \geqslant \Phi'_+(f(x)) \left(\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right) \tag{2}$$

für alle $x \in I$, wobei Φ'_+ die rechtsseitige Ableitung von Φ bedeutet. Ist Φ in $\mathbf{R}$ auch noch monoton wachsend, so hat man für alle $x \in I$

$$\int_0^x \Phi(g(t))\,dt \geqslant \int_0^x \Phi(f(t))\,dt.$$

Beweis:
a) Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Lemma 1. Seien $f, g, u: I \to \mathbf{R}$ jeweils über I Riemann-integrabel, sei u in I monoton fallend, und es gelte (1) für alle $x \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$\int_0^x u(t)\left(g(t)-f(t)\right)dt \geqslant u(x)\int_0^x \left(g(t)-f(t)\right)dt. \tag{3}$$

Zum Beweis setzen wir im Anschluss an [2], S. 114–115, $D(x) := \int_0^x (g(t)-f(t))\,dt$ in I; unter Benutzung der Formel für die partielle Integration beim Stieltjes-Integral erhalten wir für jedes $x \in I$

$$\int_0^x u(t)\left(g(t)-f(t)\right)dt = \int_0^x u(t)\,dD(t) = u(t)D(t)\big|_0^x - \int_0^x D(t)\,du(t) \geqslant u(x)D(x),$$

was (3) beweist. Hier ist $D(0)=0$ beachtet, ferner $D(t)\geqslant 0$ in I nach (1) und schliesslich die Tatsache, dass u in I monoton fällt.

b) Weiterhin benötigen wir einen Hilfssatz über konvexe Funktionen:

Lemma 2. Sei $J \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $h: J \to \mathbf{R}$ konvex in J. Dann gilt:

(i) h hat in jedem Punkt von J eine rechts- bzw. eine linksseitige Ableitung, mit h'_+ bzw. h'_- bezeichnet, und es gilt $h'_-(x) \leqslant h'_+(x)$ für alle $x \in J$.
(ii) Für alle $x_0 \in J$ und für alle $m \in [h'_-(x_0), h'_+(x_0)]$ gilt

$$h(x) - h(x_0) \geqslant m(x-x_0) \quad \text{für jedes} \quad x \in J.$$

(iii) Sowohl h'_- wie h'_+ sind in J monoton wachsend; ist h in J monoton wachsend, so sind h'_- und h'_+ in J nicht negativ.

Den Beweis von (i) und (ii) kann man [1], S. 180–183, entnehmen, nur dass «konvex» im Sinne unserer Aufgabe «schwach konvex» im Sinne von [1] entspricht. Diese Modifikation hat zur Folge, dass in [1] a.a.O. in den strengen Ungleichungen (1a), (1b), (2), (4) jeweils Gleichheit zuzulassen ist, dass in (11.6) «streng monoton» durch «monoton» zu ersetzen ist und dass in den drei echten Ungleichungen des Beweises zu (11.7) nun Gleichheiten eintreten können. Um schliesslich (iii) zu zeigen, seien $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$. Es ergibt sich aus [1], S. 183, 4. Zeile v. o.

$$h'_-(x_1) \leqslant h'_+(x_1) \leqslant \frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant h'_-(x_2) \leqslant h'_+(x_2), \tag{4}$$

wobei bei den beiden äusseren Ungleichungen (i) verwendet wurde. Aus (4) folgt das monotone Wachsen von h'_- und h'_+ unmittelbar. Ist $x_2 \in J$ beliebig, so denke man sich dazu ein $x_1 \in J$ mit $x_1 < x_2$ gewählt (J ist offen); wegen der Monotonie von h ist $0 \leqslant h(x_2) - h(x_1)$, und man hat $0 \leqslant h'_-(x_2) \leqslant h'_+(x_2)$ aus den beiden rechten Ungleichungen von (4).

c) Seien nun die Voraussetzungen unserer Aufgabe erfüllt. Dann ist Φ'_+ nach (iii) von Lemma 2 in $\mathbf{R}$ monoton wachsend und $u := \Phi'_+ \circ f: I \to \mathbf{R}$ in I monoton fallend, da f in I fällt. Da u über I Riemann-integrabel ist, sind alle Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt. Nach (ii) von Lemma 1 ist

$$\Phi(g(t))-\Phi(f(t))\geqslant\Phi'_{+}(f(t))\,(g(t)-f(t))$$

für alle $t\in I$; hieraus erhält man (2) durch Integration über $[0,x]$, wenn man noch (3) berücksichtigt.
Ist Φ in $\mathbf{R}$ monoton wachsend, so ist Φ'_{+} in $\mathbf{R}$ nach (iii) von Lemma 2 nicht negativ, und mit (1) folgt auch die letzte Behauptung.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 C. Blatter: Analysis I. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
2 D.S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

Lösungen zu Aufgabe 806 sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), Chr. A. Meyer (Ittigen).
Weitere Lösungen zu Aufgabe 806A sandten A.A. Jagers (Enschede, NL), O.P. Lossers (Eindhoven, NL) (2 Lösungen), P. Mihailescu (Zürich).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 822. Es sei $a\equiv 2 \pmod 3$ und $a+1$ genau durch 3^s $(s\geqslant 1)$ teilbar. Man bestimme für beliebiges $k\in\mathbf{N}_0$ die Ordnung der Restklasse von a in der primen Restklassengruppe mod 3^{s+k}.

L. Kuipers, Mollens

Aufgabe 823. $E=\{0,1,\ldots,m-1\}$ sei die Eckenmenge eines regulären m-Ecks mit $m=3^k n$ Ecken $(k\geqslant 1,\ (n,3)=1)$ und $D=\{0,a,b\}$ mit $0<a<b<m$ ein ausgewähltes Dreieck. Für welche a,b ist E als disjunkte Vereinigung von $3^{k-1}n$ Drehbildern von D darstellbar?
Beispiel: $E=\{0,1,\ldots,11\}=\{0,5,7\}\cup\{3,8,10\}\cup\{6,11,1\}\cup\{9,2,4\}$.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 824. Für beliebige $n \in \mathbf{Z}$ bestimme man den Wert des unendlichen Kettenbruches

$$K_n = \cfrac{n}{n + \cfrac{n+1}{n+1+\cfrac{n+2}{n+2+\cdots}}},$$

in dem die Teilzähler und Teilnenner beständig um 1 anwachsen.

I. Paasche, München, BRD

Literaturüberschau

Péter Rósza: Rekursive Funktionen in der Komputer-Theorie. 190 Seiten. US-$12. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1976.

Unter Komputer-Theorie wird hier ein Gebiet verstanden, das zwischen abstrakten Maschinenmodellen vom Typ der Registermaschinen und Programmiersprachen vom Typ ALGOL 60 liegt. Eine Pionierin der Theorie der rekursiven Funktionen fasst in diesem Buch ihre Auseinandersetzung mit fundamentalen Fragestellungen dieser Theorie zusammen, die sich über viele Jahre, zum Teil in Zusammenarbeit mit dem kürzlich verstorbenen L. Kalmar, erstreckt hat. Ihr Hilfsmittel ist die Theorie der rekursiven Funktionen, die zu Beginn, Kleene folgend, kurz rekapituliert wird.

Die Autorin zeigt anhand einer exakten Definition der Flussdiagramme als Graphschemas die Äquivalenz der Begriffe «partiell-rekursive Funktion» und «auf einer Registermaschine mittels Graphschema berechenbare Funktion»; dabei wird bemerkt, dass keine (in ALGOL zugelassenen) rekursiven Prozeduren dazu nötig sind und Graphschemata von spezieller Struktur, sog. Normalschemata, genügen. Die Behandlung der Bedeutung rekursiver Prozeduren ist, im modernen Jargon, «operationell», d.h. es wird der eigentliche Mechanismus (Kellerspeicher) des Abarbeitens solcher Prozeduren zu Hilfe genommen. Dies ist hier nicht in vollem Detail durchgeführt. Hingegen geht die Autorin auf den Berechenbarkeitsbegriff für Wortfunktionen und auf die Rekursivität der syntaktischen Begriffe für Programmiersprachen (insbesondere ALGOL und LISP) ein.

Das Buch ist in dem wohlbekannten freundlichen Stile verfasst und gibt interessante Hinweise auf weniger bekannte Originalarbeiten.

E. Engeler

Combinatorics. Nato Advanced Study Institute Series. Mathematical and Physical Sciences, Band 16, 482 Seiten. $44. Hrsg. M. Hall, Jr., und J.H. van Lint. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston 1975.

Dieser Sammelband enthält 21 Beiträge aus der Feder erstrangiger Spezialisten, die an einem Symposium erarbeitet worden sind. Es werden darin in überblickender Schau die Entwicklungen in den verschiedenen Kerndisziplinen der modernen Kombinatorik (Blockpläne; Endliche Geometrien; Codierungs-Theorie; Graphen-Theorie; Kombinatorische Geometrie; Kombinatorische Gruppentheorie) bis an die aktuelle Forschungsfront dargelegt. Jedem Artikel ist ein ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben. Das Nato Advanced Study Institute bietet mit dieser Publikation dem forschenden Mathematiker eine wertvolle Arbeitshilfe an.

M. Jeger

Sherman K. Stein: Mathematics. The Man-made Universe. An Introduction to the Spirit of Mathematics. 3.Auflage, 573 Seiten mit 440 Illustrationen. $12.50. Freeman and Company Publishers, San Francisco 1976.

Mit den früheren Auflagen dieses Buches wandte sich der Autor, Professor an der University of California in Davis, in erster Linie an Nichtmathematiker. Das Konzept war darauf ausgerichtet,