

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

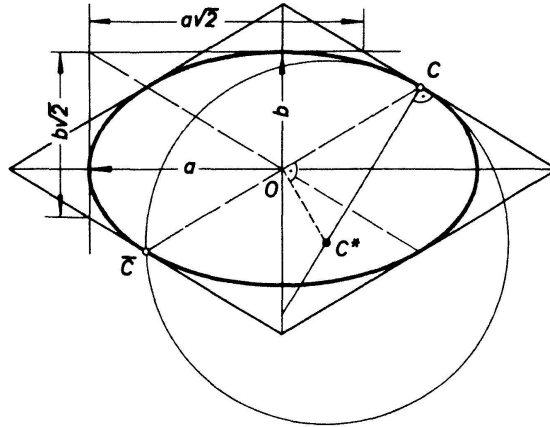
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



genannten Zwischenpunkte  $C$  gehörige Krümmungsradius wird nämlich aus dem Ellipsenzentrum  $O$  unter rechtem Winkel gesehen; der Krümmungsmittelpunkt  $C^*$  hälftes überdies den zwischen den Achsen befindlichen Normalenabschnitt (Figur). – Beweise für diesen einfachen Sachverhalt lassen sich auf verschiedene Arten führen und dürfen dem Leser überlassen bleiben.

W. Wunderlich, Technische Universität Wien

## Aufgaben

**Aufgabe 807.** Man beweise für reelle  $x, y, s, t$  mit

$$0 \leq s \leq x \quad \text{und} \quad 0 \leq t \leq y$$

die Ungleichung

$$\sinh x \sinh y \geq \min \{ \sinh(x-s) \sinh(y+t), \sinh(x+s) \sinh(y-t) \}.$$

P. Buser, Bonn, BRD

Lösung: Es ist  $\min(a, b) \leq (ab)^{1/2}$  für  $a, b \geq 0$ . Somit gilt bei den über  $x, y, s, t$  gemachten Annahmen

$$\begin{aligned} & \min \{ \sinh(x-s) \sinh(y+t), \sinh(x+s) \sinh(y-t) \} \\ & \leq [\sinh(x-s) \sinh(y+t) \sinh(x+s) \sinh(y-t)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sinh(x-s) \sinh(x+s) &= \frac{1}{2} (\cosh 2x - \cosh 2s) \\ &\leq \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1) \\ &= \sinh^2 x \end{aligned} \quad (2)$$

und ebenso

$$\sinh(y-t) \sinh(y+t) \leq \sinh^2 y. \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt nun unmittelbar die Behauptung.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und L. Kuipers (Mollens VS).

**Aufgabe 808.** In einem Sehnenviereck seien über allen Seiten und Diagonalen als Durchmesser Kreise gezeichnet. Je zwei dieser Kreise sollen benachbart heißen, wenn sie sich in einem Eckpunkt des Vierecks schneiden. Man zeige, dass die insgesamt zwölf Schnittpunkte von je zwei benachbarten Kreisen (Eckpunkte nicht mitgezählt) je zu dritt auf vier konkurrenten Geraden liegen.

Hj. Stocker, Wädenswil

Im Sehnenviereck  $A_1A_2A_3A_4$  betrachten wir von den sechs Kreisen jene drei, welche durch  $A_1$  gehen. Je zwei dieser (benachbarten) Kreise schneiden sich in einem der zwölf zur Diskussion stehenden Punkte. Diese drei Schnittpunkte sind offenbar die Fusspunkte der Lote von  $A_1$  auf die Seiten des Dreiecks  $A_2A_3A_4$  und liegen somit auf der Wallace-Geraden von  $A_1$  bezüglich des Dreiecks  $A_2A_3A_4$ . Sie geht durch den Mittelpunkt  $M$  der Strecke, welche von  $A_1$  und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $A_2A_3A_4$  begrenzt wird (siehe [1], S. 207).

$M$  ist auch der Mittelpunkt der Strecken, welche von  $A_2, A_3, A_4$  und dem Höhenschnittpunkt von  $A_3A_4A_1$  bzw.  $A_4A_1A_2$  bzw.  $A_1A_2A_3$  begrenzt werden (siehe [1], S. 169).

Bezieht man sich schliesslich statt auf  $A_1$  in gleicher Weise auf  $A_2, A_3$  und  $A_4$ , so ergibt sich die Behauptung: Die zwölf Schnittpunkte liegen je zu dritt auf vier Wallace-Geraden, die sich in  $M$  schneiden.

Bemerkung: Durch  $M$  gehen auch die vier (kongruenten) Feuerbach-Kreise der Dreiecke  $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_1$  und  $A_4A_1A_2$  (siehe [1], S. 203, 243, 244).

H. Frischknecht, Berneck

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover publications, Inc., New York 1960.

Weitere Lösungen sandten J.T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 809.** Mit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x_i \in \mathbf{Z}$ , sei ein Punkt des  $k$ -dimensionalen Gitters bezeichnet. Im Gitterwürfel  $W_n^k := \{x \mid 1 \leq x_i \leq n\}$  sei eine Relation  $\rho^k$  wie folgt definiert:

$$x \rho^k y: \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder: } x_i = y_i (1 \leq i \leq k-1) \text{ und } x_k | y_k \\ \text{oder:} & \text{es gibt ein } m \text{ mit } m \leq k-1, \text{ so dass} \\ & x_m \neq y_m, \quad x_m | y_m \text{ und } x_i = y_i \text{ f\u00fcr } i < m. \end{cases}$$

a) Man beweise, dass  $(W_n^k, \rho^k)$  eine Halbordnung ist.

b) Es sei  $U$  die Menge der bez\u00fcglich  $\rho^k$  total ungeordneten Teilmengen  $U$  von  $W_n^k$ . Man bestimme  $v_n^k = \max_{U \in U} \text{card } U$ .

J. Binz, Bolligen

L\u00f6sung des Aufgabenstellers:  $k=1$ : Die Definition reduziert sich auf  $x \rho^1 y: \Leftrightarrow x_1 | y_1$ ;  $\rho^1$  ist die gew\u00f6hnliche Teilerrelation und  $(W_n^1, \rho^1)$  ist eine Halbordnung. Aus  $W_n^1 = \{1, 2, \dots, n\}$  w\u00e4hlen wir die  $s = [(n+1)/2]$  ungeraden Zahlen  $u_1 = 1, u_2 = 3, \dots, u_s = 2[(n+1)/2] - 1$  aus und bilden f\u00fcr  $i = 1, 2, \dots, s$  die Mengen

$$M_i^1 = \{u_i, 2u_i, 2^2u_i, \dots, 2^{r_i}u_i\} \quad \text{mit} \quad \frac{n}{2} < 2^{r_i}u_i \leq n.$$

$M_i^1$  ist f\u00fcr jedes  $i$  bez\u00fcglich  $\rho^1$  linear geordnet, und die  $s$  Mengen  $M_i^1$  bilden eine Partition von  $W_n^1$ . W\u00e4hlt man aus  $W_n^1$  eine  $(s+1)$ -elementige Teilmenge  $S^1$  aus, so fallen zwei ihrer Elemente in die gleiche Menge  $M_i$ .  $S^1$  ist somit nicht total ungeordnet, und es gilt  $v_n^1 \leq s$ . Andererseits hat die Menge  $T^1 = \{x; [(n+2)/2] \leq x \leq n\}$   $s$  Elemente und ist total ungeordnet. Daher wird  $v_n^1 = s$ .

$k \geq 2$ : Wegen (1) gilt  $x \rho^k x$  f\u00fcr alle  $x$ ,  $\rho^k$  ist also reflexiv. Zum Nachweis der Transitivit\u00e4t seien  $x \rho^k y$  und  $y \rho^k z$  vorausgesetzt; es gibt vier F\u00e4lle, je nachdem ob (1) oder (2) zutrifft:

(1), (1): Man erh\u00e4lt unmittelbar  $x_i = z_i$  f\u00fcr  $i \leq k-1$  und  $x_k | z_k$ . Somit ist  $x \rho^k z$  nach (1).

(1), (2): Aus  $y_m \neq z_m, y_m | z_m, y_i = z_i$  f\u00fcr  $i < m$  folgt zuerst  $x_i = z_i$  f\u00fcr  $i < m$ , wegen  $x_m = y_m$  weiter  $x_m | z_m$  und  $x_m \neq z_m$ , somit  $x \rho^k z$  nach (2). Der Fall (2), (1) erledigt sich in analoger Weise.

(2), (2): Es seien  $m_1, m_2$  die beiden Stichzahlen gem\u00e4ss (2) und  $m = \min(m_1, m_2)$ . Dann ist  $x_i = z_i$  f\u00fcr  $i < m$ ; da entweder  $x_m = y_m < z_m$  oder  $x_m < y_m = z_m$  oder  $x_m < y_m < z_m$  gilt, wird  $x_m \neq z_m$ . In der gleichen Reihenfolge gilt dann  $y_m | z_m$  oder  $x_m | y_m$  oder  $x_m | y_m, y_m | z_m$ , also jedenfalls  $x_m | z_m$ . Somit ist  $x \rho^k z$  nach (2).

Schliesslich folgt aus  $x \rho^k y$  und  $y \rho^k x$ , dass  $x = y$  ist. Andernfalls g\u00e4be es  $m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , mit  $x_m \neq y_m, x_i = y_i$  f\u00fcr  $i < m$ .

Ist  $m \leq k-1$ , so folgt aus (2)  $x_m | y_m, y_m | x_m$ , also doch  $x_m = y_m$ . F\u00fcr  $m = k$  erh\u00e4lt man analoger Weise den Widerspruch  $x_k = y_k$ .  $\rho^k$  ist demnach auch identitiv, und somit ist  $(W_n^k, \rho^k)$  eine Halbordnung.

Nun ist  $W_n^k = W_n^1 \times W_n^1 \times \dots \times W_n^1$ ,  $k$  Faktoren. F\u00fcr  $1 \leq i_\mu \leq s, 1 \leq \mu \leq k$  bilden wir die  $s^k$  Mengen

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}^k = M_{i_1}^1 \times M_{i_2}^1 \times \dots \times M_{i_k}^1 \subset W_n^k.$$

Wieder sind diese Mengen je linear geordnet und bilden insgesamt eine Partition von  $W_n^k$ . W\u00e4hlen wir deshalb aus  $W_n^k$  eine  $(s^k + 1)$ -elementige Teilmenge  $S^k$  aus, so

fallen zwei ihrer Elemente in die gleiche Menge  $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^k$ , sind also bezüglich  $\rho^k$  vergleichbar.  $S^k$  ist somit nicht total ungeordnet, und wir haben  $v_n^k \leq s^k$ . Andererseits hat die aus  $k$  Faktoren gebildete Menge  $T^k = T^1 \times T^1 \times \dots \times T^1 \subset W_n^k$   $s^k$  Elemente und ist offensichtlich total ungeordnet. Damit wird  $v_n^k = s^k$ .

Zusammengefasst:

$$v_n^k = \left[ \frac{n+1}{2} \right]^k \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Eine weitere Lösung sandte L. Himstedt, Bad Harzburg, BRD.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Februar 1980* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 825.** Es sei  $N$  eine natürliche Zahl. Für  $n = 1, 2, \dots, 2N$  sei  $f(n)$  definiert durch

$$f(n) = \binom{2N}{n}^{-1} \sum_{k=0}^n \left| \frac{n-2k}{n} \right| \binom{N}{k} \binom{N}{n-k}.$$

Man gebe einen geschlossenen Term für  $f(n)$  an. Ferner zeige man, dass stets  $f(n+1) \leq f(n)$ .

S. Gabler, Mannheim, BRD

**Aufgabe 826.** Man beweise folgende Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$$

für die mittleren Binomialkoeffizienten: Für alle  $m, n \in \mathbf{N}$  gilt

$$\binom{(m+1)n}{n} \geq \frac{(m+1)^{(m+1)n}}{(m+1)nm^{mn}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $m = n = 1$ .

A. Kemnitz, Braunschweig, BRD

**Aufgabe 827.** Man zeige, dass die Kongruenz

$$1 + 4(n!)^4 \equiv 0 \pmod{4n + 1}$$

dann und nur dann gilt, wenn  $n$  Quadratzahl und  $4n + 1$  Primzahl ist.

E. Trost, Zürich

## Literaturüberschau

S. M. Ulam: *Adventures of a Mathematician*. 317 Seiten. US \$ 4.95. Charles Scribner's Sons, New York 1976.

Die vorliegende Autobiographie von S. M. Ulam beschreibt auf fesselnde Art und Weise die verschiedenen Stationen im Leben des polnischen Mathematikers: Seine Kindheit und Studienjahre in Polen, die ersten Auslandsreisen und Publikationen, die Übersiedlung nach Amerika sowie seine Tätigkeit an verschiedenen amerikanischen Universitäten und im nationalen Forschungslaboratorium von Los Alamos. Das Werk vermittelt einen lebendigen Einblick in den Werdegang eines Mathematikers. Andererseits enthält es wertvolle Angaben über die Entwicklung der Wasserstoffbombe, der Rechenmaschinen und der Raumfahrt, über Forschungsprojekte, an denen der Autor mitbeteiligt war, sowie über mehrere Wissenschaftler (Fermi, von Neumann), mit denen er verkehrt hat.

E. Neuenschwander

A. Linder und W. Berchtold: *Statistische Auswertung von Prozentzahlen*. Uni-Taschenbücher, Band 522. 232 Seiten. DM 17.80. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1976.

Nicht selten stösst man in der Praxis auf statistische Probleme, bei denen Analysen von Prozentzahlen durchzuführen sind. Sucht man sodann nach geeigneten Verfahren, um diese Prozentzahlen den üblichen statistischen Methoden zugänglich zu machen, so findet man in deutschsprachigen Lehrbüchern der Statistik recht wenig. Mit dem vorliegenden Buch versuchen nun die beiden Autoren, diese Lücke in der statistischen Literatur zu schliessen. Der reiche Inhalt kann durch folgende Aufzählung nur andeutungsweise wiedergegeben werden:

1. Einleitung (Winkel-, Probit-, Logit-, Loglotransformation usw.);
2. und 3. Einfache lineare Regression (eine und mehrere Regressionsgeraden);
4. Mehrfache Regression, allgemeines lineares Modell;
5. Ein- und Mehrwegklassifikation, Streuungszerlegung;
6. Tafeln.

Die Darstellung des Stoffes in den einzelnen Abschnitten ist so gehalten, dass je zuerst die theoretischen Grundlagen vermittelt und diese sodann durch zahlreiche praktische Beispiele aus Biologie, Medizin, Technik und Soziologie illustriert werden. – Das Buch vermittelt eine gute Übersicht über das oben erwähnte Sondergebiet der Statistik und gehört deshalb in die Bibliothek jedes Statistikers. Wegen seiner leichten Lesbarkeit – mehr als elementare Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden nicht vorausgesetzt – kann es auch Studenten, die sich in die praktische Arbeit mit statistischen Methoden vertiefen wollen, wertvolle Dienste leisten.

V. Wüthrich

C. Reid: *Courant in Göttingen and New York; The Story of an Improbable Mathematician*. 314 Seiten und ein 16seitiges Photoalbum. DM 31.30. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1976.

Als Schüler von Felix Klein und David Hilbert vollendete Richard Courant (1888–1972) sein akademisches Studium in Göttingen und übernahm dort später selbst eine Professur und die Direktion des Mathematischen Instituts der Universität. Nachdem er Göttingen nach dem ersten Weltkrieg zu neuem Ruhm verholfen hatte, blieb ihm als Spross einer jüdischen Familie die Emigration aus dem Deutschland der dreissiger Jahre nicht erspart. An seinem neuen Wirkungsort New York gelang ihm, dem Ausländer, in unentwegter jahrzehntelanger Anstrengung, getragen vom Göttinger Geist, die Gründung des heute nach ihm benannten hochangesehenen Forschungsinstituts an der New York University.

Die Autorin zeichnet in 28 chronologisch sich folgenden Kapiteln die Phasen dieses interessanten Lebens. Aufgrund von Tagebuchnotizen Courants sowie zahlreicher Interviews mit Courant und vielen