# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 4

PDF erstellt am: **05.07.2024**

**Nutzungsbedingungen**

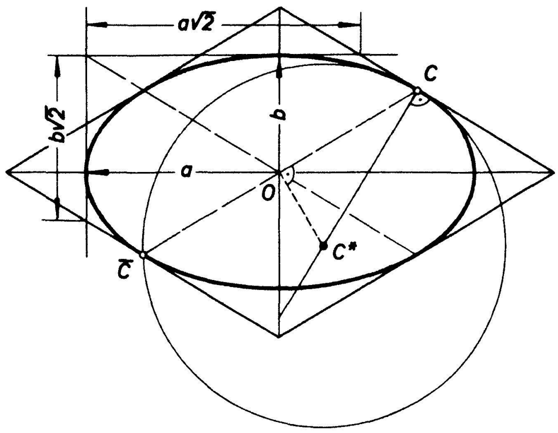
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**




genannten Zwischenpunkte $C$ gehörige Krümmungsradius wird nämlich aus dem Ellipsenzentrum $O$ unter rechtem Winkel gesehen; der Krümmungsmittelpunkt $C^*$ hälftet überdies den zwischen den Achsen befindlichen Normalenabschnitt (Figur). - Beweise für diesen einfachen Sachverhalt lassen sich auf verschiedene Arten führen und dürfen dem Leser überlassen bleiben.

W. Wunderlich, Technische Universität Wien

# Aufgaben

**Aufgabe 807.** Man beweise für reelle $x, y, s, t$ mit

$$0 \leqslant s \leqslant x \quad \text{und} \quad 0 \leqslant t \leqslant y$$

die Ungleichung

$$\sinh x \sinh y \geqslant \min\{\sinh(x-s)\sinh(y+t), \sinh(x+s)\sinh(y-t)\}.$$

P. Buser, Bonn, BRD

Lösung: Es ist $\min(a,b) \leqslant (ab)^{1/2}$ für $a, b \geqslant 0$. Somit gilt bei den über $x, y, s, t$ gemachten Annahmen

$$\begin{aligned}&\min\{\sinh(x-s)\sinh(y+t), \sinh(x+s)\sinh(y-t)\}\\ &\leqslant [\sinh(x-s)\sinh(y+t)\sinh(x+s)\sinh(y-t)]^{1/2}.\end{aligned} \tag{1}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sinh(x-s)\sinh(x+s) &= \frac{1}{2}(\cosh 2x - \cosh 2s)\\ &\leqslant \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)\\ &= \sinh^2 x\end{aligned} \tag{2}$$

und ebenso

$$\sinh(y-t)\sinh(y+t) \leqslant \sinh^2 y. \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt nun unmittelbar die Behauptung.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und L. Kuipers (Mollens VS).

**Aufgabe 808.** In einem Sehnenviereck seien über allen Seiten und Diagonalen als Durchmessern Kreise gezeichnet. Je zwei dieser Kreise sollen benachbart heissen, wenn sie sich in einem Eckpunkt des Vierecks schneiden. Man zeige, dass die insgesamt zwölf Schnittpunkte von je zwei benachbarten Kreisen (Eckpunkte nicht mitgezählt) je zu dritt auf vier konkurrenten Geraden liegen.

Hj. Stocker, Wädenswil

Im Sehnenviereck $A_1A_2A_3A_4$ betrachten wir von den sechs Kreisen jene drei, welche durch $A_1$ gehen. Je zwei dieser (benachbarten) Kreise schneiden sich in einem der zwölf zur Diskussion stehenden Punkte. Diese drei Schnittpunkte sind offenbar die Fusspunkte der Lote von $A_1$ auf die Seiten des Dreiecks $A_2A_3A_4$ und liegen somit auf der Wallace-Geraden von $A_1$ bezüglich des Dreiecks $A_2A_3A_4$. Sie geht durch den Mittelpunkt $M$ der Strecke, welche von $A_1$ und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_2A_3A_4$ begrenzt wird (siehe [1], S. 207).
$M$ ist auch der Mittelpunkt der Strecken, welche von $A_2, A_3, A_4$ und dem Höhenschnittpunkt von $A_3A_4A_1$ bzw. $A_4A_1A_2$ bzw. $A_1A_2A_3$ begrenzt werden (siehe [1], S. 169).
Bezieht man sich schliesslich statt auf $A_1$ in gleicher Weise auf $A_2, A_3$ und $A_4$, so ergibt sich die Behauptung: Die zwölf Schnittpunkte liegen je zu dritt auf vier Wallace-Geraden, die sich in $M$ schneiden.

Bemerkung: Durch $M$ gehen auch die vier (kongruenten) Feuerbach-Kreise der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ und $A_4A_1A_2$ (siehe [1], S. 203, 243, 244).

H. Frischknecht, Berneck

LITERATURVERZEICHNIS

1 R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover publications, Inc., New York 1960.

Weitere Lösungen sandten J.T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 809.** Mit $x=(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_i \in \mathbf{Z}$, sei ein Punkt des $k$-dimensionalen Gitters bezeichnet. Im Gitterwürfel $W_n^k := \{x \mid 1 \leqslant x_i \leqslant n\}$ sei eine Relation $\rho^k$ wie folgt definiert:

$$x\rho^k y :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder: } x_i = y_i (1 \leqslant i \leqslant k-1) \quad \text{und} \quad x_k \mid y_k \\ \text{oder: } \quad \text{es gibt ein } m \text{ mit } m \leqslant k-1, \text{ so dass} \\ \qquad x_m \neq y_m, \quad x_m \mid y_m \quad \text{und} \quad x_i = y_i \quad \text{für} \quad i < m. \end{cases}$$

a) Man beweise, dass $(W_n^k, \rho^k)$ eine Halbordnung ist.
b) Es sei $\mathbf{U}$ die Menge der bezüglich $\rho^k$ total ungeordneten Teilmengen $U$ von $W_n^k$. Man bestimme $v_n^k = \max\limits_{U \in \mathbf{U}} \operatorname{card} U$.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers: $k=1$: Die Definition reduziert sich auf $x\rho^1 y :\Leftrightarrow x_1 \mid y_1$; $\rho^1$ ist die gewöhnliche Teilerrelation und $(W_n^1, \rho^1)$ ist eine Halbordnung. Aus $W_n^1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ wählen wir die $s = [(n+1)/2]$ ungeraden Zahlen $u_1 = 1, u_2 = 3, \ldots, u_s = 2[(n+1)/2] - 1$ aus und bilden für $i = 1, 2, \ldots, s$ die Mengen

$$M_i^1 = \{u_i, 2u_i, 2^2 u_i, \ldots, 2^{r_i} u_i\} \quad \text{mit} \quad \frac{n}{2} < 2^{r_i} u_i \leqslant n.$$

$M_i^1$ ist für jedes $i$ bezüglich $\rho^1$ linear geordnet, und die $s$ Mengen $M_i^1$ bilden eine Partition von $W_n^1$. Wählt man aus $W_n^1$ eine $(s+1)$-elementige Teilmenge $S^1$ aus, so fallen zwei ihrer Elemente in die gleiche Menge $M_i$. $S^1$ ist somit nicht total ungeordnet, und es gilt $v_n^1 \leqslant s$. Andererseits hat die Menge $T^1 = \{x;\ [(n+2)/2] \leqslant x \leqslant n\}$ $s$ Elemente und ist total ungeordnet. Daher wird $v_n^1 = s$.

$k \geqslant 2$: Wegen (1) gilt $x\rho^k x$ für alle $x$, $\rho^k$ ist also reflexiv. Zum Nachweis der Transitivität seien $x\rho^k y$ und $y\rho^k z$ vorausgesetzt; es gibt vier Fälle, je nachdem ob (1) oder (2) zutrifft:

(1), (1): Man erhält unmittelbar $x_i = z_i$ für $i \leqslant k-1$ und $x_k \mid z_k$. Somit ist $x\rho^k z$ nach (1).

(1), (2): Aus $y_m \neq z_m$, $y_m \mid z_m$, $y_i = z_i$ für $i < m$ folgt zuerst $x_i = z_i$ für $i < m$, wegen $x_m = y_m$ weiter $x_m \mid z_m$ und $x_m \neq z_m$, somit $x\rho^k z$ nach (2). Der Fall (2), (1) erledigt sich in analoger Weise.

(2), (2): Es seien $m_1, m_2$ die beiden Stichzahlen gemäss (2) und $m = \min(m_1, m_2)$. Dann ist $x_i = z_i$ für $i < m$; da entweder $x_m = y_m < z_m$ oder $x_m < y_m = z_m$ oder $x_m < y_m < z_m$ gilt, wird $x_m \neq z_m$. In der gleichen Reihenfolge gilt dann $y_m \mid z_m$ oder $x_m \mid y_m$ oder $x_m \mid y_m, y_m \mid z_m$, also jedenfalls $x_m \mid z_m$. Somit ist $x\rho^k z$ nach (2).

Schliesslich folgt aus $x\rho^k y$ und $y\rho^k x$, dass $x = y$ ist. Andernfalls gäbe es $m$, $1 \leqslant m \leqslant k$, mit $x_m \neq y_m$, $x_i = y_i$ für $i < m$.

Ist $m \leqslant k-1$, so folgt aus (2) $x_m \mid y_m$, $y_m \mid x_m$, also doch $x_m = y_m$. Für $m = k$ erhält man analogerweise den Widerspruch $x_k = y_k$. $\rho^k$ ist demnach auch identitiv, und somit ist $(W_n^k, \rho^k)$ eine Halbordnung.

Nun ist $W_n^k = W_n^1 \times W_n^1 \times \cdots \times W_n^1$, $k$ Faktoren. Für $1 \leqslant i_\mu \leqslant s$, $1 \leqslant \mu \leqslant k$ bilden wir die $s^k$ Mengen

$$M_{i_1 i_2 \cdots i_k}^k = M_{i_1}^1 \times M_{i_2}^1 \times \cdots \times M_{i_k}^1 \subset W_n^k.$$

Wieder sind diese Mengen je linear georndet und bilden insgesamt eine Partition von $W_n^k$. Wählen wir deshalb aus $W_n^k$ eine $(s^k+1)$-elementige Teilmenge $S^k$ aus, so

fallen zwei ihrer Elemente in die gleiche Menge $M^k_{i_1 i_2 \cdots i_k}$, sind also bezüglich $\rho^k$ vergleichbar. $S^k$ ist somit nicht total ungeordnet, und wir haben $v^k_n \leqslant s^k$. Andererseits hat die aus $k$ Faktoren gebildete Menge $T^k = T^1 \times T^1 \times \cdots \times T^1 \subset W^k_n$ $s^k$ Elemente und ist offensichtlich total ungeordnet. Damit wird $v^k_n = s^k$.
Zusammengefasst:

$$v^k_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]^k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Eine weitere Lösung sandte L. Himstedt, Bad Harzburg, BRD.

# Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1980* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 825.** Es sei $N$ eine natürliche Zahl. Für $n = 1, 2, \ldots, 2N$ sei $f(n)$ definiert durch

$$f(n) = \binom{2N}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{n-2k}{n}\right| \binom{N}{k} \binom{N}{n-k}.$$

Man gebe einen geschlossenen Term für $f(n)$ an. Ferner zeige man, dass stets $f(n+1) \leqslant f(n)$.

S. Gabler, Mannheim, BRD

**Aufgabe 826.** Man beweise folgende Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n}$$

für die mittleren Binomialkoeffizienten: Für alle $m, n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\binom{(m+1)n}{n} \geqslant \frac{(m+1)^{(m+1)n}}{(m+1)nm^{mn}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $m = n = 1$.

A. Kemnitz, Braunschweig, BRD

**Aufgabe 827.** Man zeige, dass die Kongruenz

$$1+4(n!)^4 \equiv 0 \pmod{4n+1}$$

dann und nur dann gilt, wenn $n$ Quadratzahl und $4n+1$ Primzahl ist.

E. Trost, Zürich

# Literaturüberschau

S.M. Ulam: Adventures of a Mathematician. 317 Seiten. US $ 4.95. Charles Scribner's Sons, New York 1976.

Die vorliegende Autobiographie von S.M. Ulam beschreibt auf fesselnde Art und Weise die verschiedenen Stationen im Leben des polnischen Mathematikers: Seine Kindheit und Studienjahre in Polen, die ersten Auslandreisen und Publikationen, die Übersiedlung nach Amerika sowie seine Tätigkeit an verschiedenen amerikanischen Universitäten und im nationalen Forschungslaboratorium von Los Alamos. Das Werk vermittelt einen lebendigen Einblick in den Werdegang eines Mathematikers. Andererseits enthält es wertvolle Angaben über die Entwicklung der Wasserstoffbombe, der Rechenmaschinen und der Raumfahrt, über Forschungsprojekte, an denen der Autor mitbeteiligt war, sowie über mehrere Wissenschaftler (Fermi, von Neumann), mit denen er verkehrt hat. E. Neuenschwander

A. Linder und W. Berchtold: Statistische Auswertung von Prozentzahlen. Uni-Taschenbücher, Band 522. 232 Seiten. DM 17.80. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1976.

Nicht selten stösst man in der Praxis auf statistische Probleme, bei denen Analysen von Prozentzahlen durchzuführen sind. Sucht man sodann nach geeigneten Verfahren, um diese Prozentzahlen den üblichen statistischen Methoden zugänglich zu machen, so findet man in deutschsprachigen Lehrbüchern der Statistik recht wenig. Mit dem vorliegenden Buch versuchen nun die beiden Autoren, diese Lücke in der statistischen Literatur zu schliessen. Der reiche Inhalt kann durch folgende Aufzählung nur andeutungsweise wiedergegeben werden:

1. Einleitung (Winkel-, Probit-, Logit-, Loglotransformation usw.);
2. und 3. Einfache lineare Regression (eine und mehrere Regressionsgeraden);
4. Mehrfache Regression, allgemeines lineares Modell;
5. Ein- und Mehrwegklassifikation, Streuungszerlegung;
6. Tafeln.

Die Darstellung des Stoffes in den einzelnen Abschnitten ist so gehalten, dass je zuerst die theoretischen Grundlagen vermittelt und diese sodann durch zahlreiche praktische Beispiele aus Biologie, Medizin, Technik und Soziologie illustriert werden. - Das Buch vermittelt eine gute Übersicht über das oben erwähnte Sondergebiet der Statistik und gehört deshalb in die Bibliothek jedes Statistikers. Wegen seiner leichten Lesbarkeit - mehr als elementare Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden nicht vorausgesetzt - kann es auch Studenten, die sich in die praktische Arbeit mit statistischen Methoden vertiefen wollen, wertvolle Dienste leisten. V. Wüthrich

C. Reid: Courant in Göttingen and New York; The Story of an Improbable Mathematician. 314 Seiten und ein 16seitiges Photoalbum. DM 31.30. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1976.

Als Schüler von Felix Klein und David Hilbert vollendete Richard Courant (1888-1972) sein akademisches Studium in Göttingen und übernahm dort später selbst eine Professur und die Direktion des Mathematischen Instituts der Universität. Nachdem er Göttingen nach dem ersten Weltkrieg zu neuem Ruhm verholfen hatte, blieb ihm als Spross einer jüdischen Familie die Emigration aus dem Deutschland der dreissiger Jahre nicht erspart. An seinem neuen Wirkungsort New York gelang ihm, dem Ausländer, in unentwegter jahrzehntelanger Anstrengung, getragen vom Göttinger Geist, die Gründung des heute nach ihm benannten hochangesehenen Forschungsinstituts an der New York University.

Die Autorin zeichnet in 28 chronologisch sich folgenden Kapiteln die Phasen dieses interessanten Lebens. Aufgrund von Tagebuchnotizen Courants sowie zahlreicher Interviews mit Courant und vielen