

# Ponceletsche Dreieckscharen

Autor(en): **Ungethüm, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33808>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1964 Grenzfragen der Wissenschaft. Vorträge und Abhandlungen aus dem Bereich der exakten Wissenschaften

*Schweizerische Hochschulzeitung*

1960 Freie Forschung

1962 Philosophie der exakten Wissenschaften, ihre Aktualität und ihre Problematik

*Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich*

1924 Über das topologische Abbild einer Strecke

1925 Über topologische Involutionen

1925 Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete

1925 Über periodische Transformationen von Flächen

1940 Eine Kennzeichnung der Kugel

*Zeitschrift für Astrophysik*

1967 Die kosmologischen Lösungen der linearen Feldtheorie

*Zeitschrift für Physik*

1954 Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie

1954 Zur linearen Feldtheorie I (Ein Wirkungsprinzip und seine Anwendung in der Kosmologie)

1955 Zur linearen Feldtheorie II (Schwache Felder)

1955 Zur linearen Feldtheorie III (Die Gravitationsgleichungen)

1955 Berichtigung und Ergänzung «zur linearen Feldtheorie»

1956 Zur linearen Feldtheorie IV (Statische Felder)

1958 Zur linearen Feldtheorie V (Ein asymmetrisches Wirkungsprinzip)

1963 Bericht über eine einheitliche Feldtheorie

## Ponceletsche Dreiecksscharen

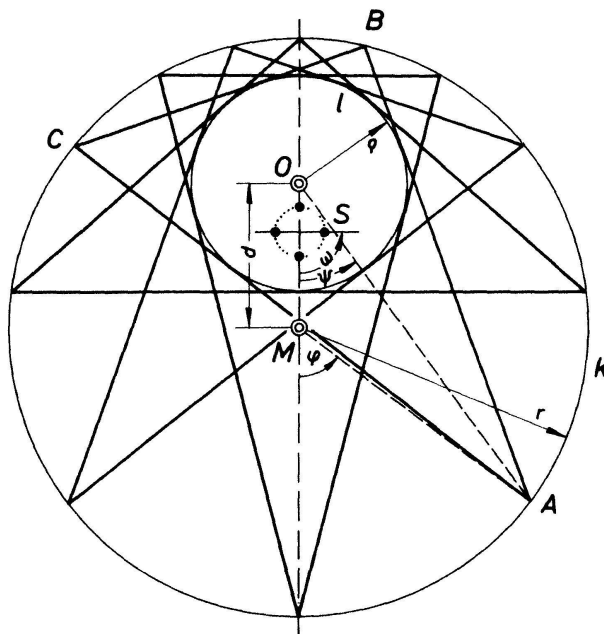
1. Die Ermittlung eines Dreiecks  $ABC$  aus seinem Umkreis  $k(M, r)$  und seinem Inkreis  $l(O, \rho)$  ist bekanntlich ein sogenanntes «poristisches Problem», d.h. es gibt entweder überhaupt keine Lösung oder aber eine stetige Schar von unendlich vielen Lösungen. Dies liegt daran, dass die Angabestücke voneinander abhängig sind: Zwischen dem Umkreisradius  $r$ , dem Inkreisradius  $\rho$  und der Zentraldistanz  $d = \overline{MO}$  besteht nämlich eine nach L. Euler benannte Relation

$$d^2 = r(r - 2\rho), \quad (1)$$

die allerdings schon 20 Jahre früher von W. Chapple (1746) gefunden wurde [2], S.47. Werden also die drei Stücke  $r$ ,  $\rho$  und  $d$  willkürlich vorgegeben, so werden sie für gewöhnlich in Widerspruch zu (1) stehen, und es kann daher kein Lösungsdreieck geben; sind sie hingegen in Einklang mit (1), so gelten sie eigentlich nur für zwei Daten, und es werden  $\infty^1$  Lösungen existieren.

Liegen mithin Umkreis  $k$  und Inkreis  $l$  mit richtiger Zentraldistanz  $d$  vor, dann kann man mit der Ecke  $A$  an beliebiger Stelle von  $k$  beginnen, von dort eine Tangente  $AB$  an  $l$  legen, von  $B$  auf  $k$  in gleicher Weise fortfahren, und nach

drei Schritten wird sich das Dreieck schliessen (Fig. 1). Dies ist ein Sonderfall des berühmten *Schliessungssatzes* von J. V. Poncelet (1817), der im wesentlichen besagt: Ist ein  $n$ -Eck einem Kegelschnitt  $k$  eingeschrieben und gleichzeitig einem Kegelschnitt  $l$  umgeschrieben, dann gibt es noch  $\infty^1$  weitere  $n$ -Ecke dieser Art [2], S. 46ff. Obwohl der Satz für  $n=3$  bereits von C. Maclaurin (1735) ausgesprochen wurde, soll die Schar der Dreiecke mit gemeinsamem Um- und Inkreis als *Poncelet-Schar* bezeichnet werden. Die als Symmetrieachse fungierende Verbindungsgerade der Zentren  $M$  und  $O$  soll kurz die «Zentrale» heissen.



Figur 1. Reguläre Poncelet-Folge ( $r=8$ ,  $\rho=3$ ;  $d=4$ ).

Mit einem Dreieck sind bekanntlich zahllose «merkwürdige» Punkte und Linien verknüpft [1]. Die Frage, wie sich solche Elemente verhalten, wenn das Dreieck eine Ponceletsche Schar durchläuft, scheint noch nicht behandelt worden zu sein. Dass es sich hierbei um eine reizvolle Fragestellung handelt, deren Untersuchung durchaus lohnt, mögen die nachstehenden Beispiele zeigen.

Zunächst ist klar, dass sämtliche Grössen, die nur von  $r$  und  $\rho$  abhängen, für die Dreiecke einer Poncelet-Schar *invariant* sind. Erwähnt seien beispielsweise die Ausdrücke [4], S. 470ff.:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{\rho}{r}; \quad (2a)$$

$$4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{r}; \quad (2b)$$

$$\frac{abc}{s} = 4r\rho \quad \text{mit} \quad 2s = a + b + c; \quad (2c)$$

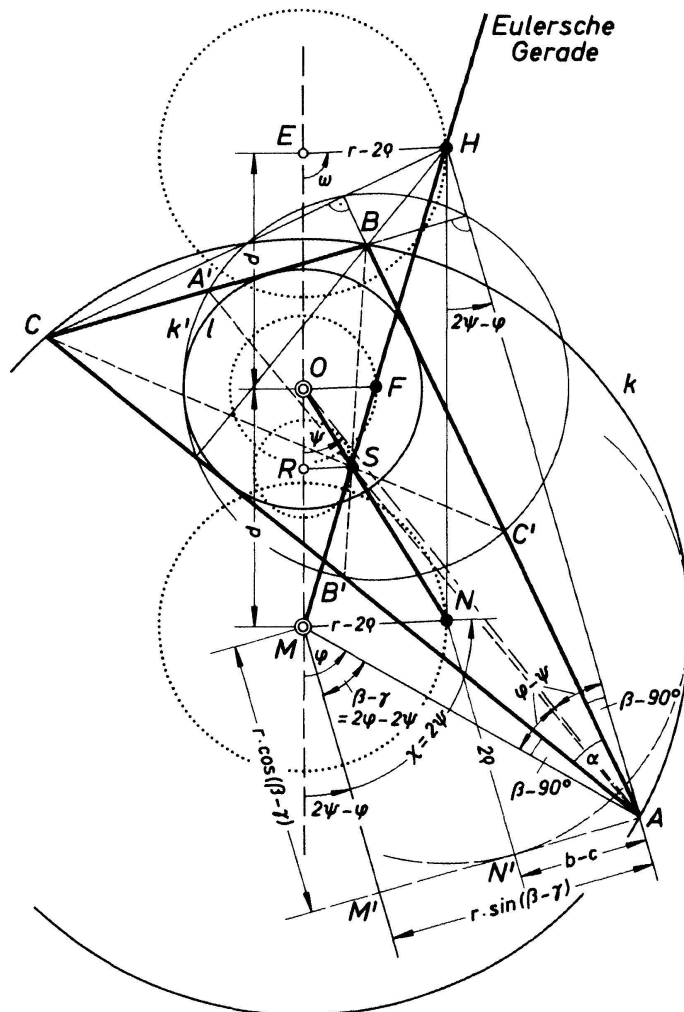
$$ab + bc + ca - s^2 = \rho(4r + \rho); \tag{2d}$$

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho. \tag{2e}$$

2. Der *Feuerbachsche Kreis* eines Dreiecks  $ABC$  enthält neben den Höhenfusspunkten die Seitenmitten  $A', B', C'$ ; als Umkreis  $k'$  des «Mittendreiecks»  $A'B'C'$  hängt er mit dem Umkreis  $k$  des «Urdreiecks»  $ABC$  durch die zentrische Ähnlichkeit mit dem Schwerpunkt  $S$  als Zentrum und dem Faktor  $-1/2$  zusammen. Sein Radius hat daher den Betrag  $r' = r/2$ , und sein Mittelpunkt  $M' = F$  gehört der *Eulerschen Geraden*  $SM$  an, wobei  $\overline{SF} : \overline{SM} = -1 : 2$  (Fig. 2).

Eine merkwürdige, nicht ganz leicht zu beweisende Eigenschaft des Feuerbach-Kreises besteht darin, dass er den Inkreis  $l$  (und ebenso auch die drei Ankreise) berührt. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Feuerbach-Zentren aller Dreiecke einer Poncelet-Schar auf einem zu  $l$  konzentrischen Kreis mit dem Radius  $(r/2) - \rho$  liegen.

3. In der genannten Ähnlichkeit entspricht dem *Höhenschnittpunkt*  $H$  des Urdreiecks der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks, der mit dem Umkreiszentrum



Figur 2. Ortskreise merkwürdiger Punkte ( $r = 8, \rho = 2,5; d = 4,899$ ).

$M$  identisch ist;  $H$  gehört mithin ebenfalls der Eulerschen Geraden an, und wegen  $\overline{SM}:\overline{SH} = -1:2$  gilt  $\overline{MF}:\overline{MH} = 1:2$  (Fig. 2). Hieraus ist zu erkennen, dass die Höhenschnittpunkte sämtlicher Dreiecke einer Poncelet-Schar einen Kreis vom Radius  $r - 2\rho$  erfüllen, dessen Mittelpunkt  $E$  das Spiegelbild von  $M$  bezüglich  $O$  ist.

4. *Schwerpunkt*  $S$  und Höhenschnittpunkt  $H$  sind durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum  $M$  und dem Faktor 3 verknüpft (Fig. 2). Dies zieht nach sich, dass auch die Schwerpunkte aller Dreiecke einer Poncelet-Schar auf einem Kreis liegen; sein Mittelpunkt  $R$  befindet sich in der Entfernung  $\overline{MR} = 2d/3$  auf der Zentrale, und sein Radius hat den Betrag  $(r - 2\rho)/3$ .

5. Der *Nagelsche Punkt*  $N$  des Dreiecks  $ABC$  ist definiert als Schnittpunkt der drei Eckenlinien, die jeweils von einer Ecke zum Berührungspunkt der Gegenseite mit dem zugehörigen Ankreis gehen [1], S. 1203. Einfacher ist er zu erklären als das Inkreiszentrum des dem Urdreieck umschriebenen «Aussendreiecks», dessen Seiten zu den entsprechenden Urseiten parallel laufen. Das Inkreiszentrum  $O$  ist mithin Nagelscher Punkt des Mittendreiecks.  $O$  und  $N$  liegen daher auf einem Strahl durch den Schwerpunkt  $S$ , und es gilt  $\overline{SO}:\overline{SN} = -1:2$  (Fig. 2).  $S$  und  $N$  entsprechen einander demnach in der zentrischen Ähnlichkeit mit dem Zentrum  $O$  und dem Faktor 3. Mit Rücksicht auf Abschnitt 4 ergibt sich also, dass die Nagelschen Punkte aller Dreiecke einer Poncelet-Schar auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r - 2\rho$  liegen. Überdies bemerkt man, dass die Punkte  $M$ ,  $N$ ,  $H$  und  $E$  ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt  $F$  bilden, dessen Seiten ausschliesslich durch  $r$  und  $\rho$  darstellbar sind.

Die bisherigen Ergebnisse seien zusammengefasst im

**Satz 1.** *Durchläuft ein (nicht gleichseitiges) Dreieck eine Poncelet-Schar, so wandern der Feuerbachsche Punkt  $F$ , der Höhenschnittpunkt  $H$ , der Schwerpunkt  $S$  und der Nagelsche Punkt  $N$  auf Kreisen, und zwar mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten<sup>1)</sup>.*

6. Schlägt man um den Nagelschen Punkt  $N$  mit dem Radius  $2\rho$  den Inkreis des Aussendreiecks, so berührt er die durch  $A$  gehende, zu  $BC$  parallele Seite desselben in einem Punkt  $N'$ , der von  $A$  die Entfernung  $b - c = \overline{AC} - \overline{AB}$  hat (Fig. 2). Überdies berührt er den Umkreis  $k$  in einem Punkt auf der Geraden  $MN$ . Gelingt es umgekehrt, den dafür massgebenden Zentralabstand  $\overline{MN} = r - 2\rho$

1) Auch für den *Umfangsschwerpunkt*, der bekanntlich mit dem Inkreiszentrum des Mittendreiecks zusammenfällt und daher die Strecke  $ON$  halbiert [1], S. 1203, liesse sich ein Ortskreis feststellen, der zum Bahnkreis des Feuerbach-Punktes  $F$  kongruent ist. – Mit etwas mehr Aufwand lässt sich ferner auch für den *Gergonneschen Punkt* (in welchem die zu den Berührungspunkten des Inkreises zielenden Eckenlinien zusammenlaufen) ein Ortskreis nachweisen; dessen Radius  $\rho(r - 2\rho)/(4r + \rho) < r/33$  ist relativ klein. – Beachtet man schliesslich, dass der Inkreiszentrum  $O$  Höhenschnittpunkt des Dreiecks der drei Ankreiszentren ist und dieses den Kreis  $k(M, r)$  zum Feuerbach-Kreis hat, so erkennt man, dass auch die *Ankreiszentren* auf einem (gemeinsamen) Kreis wandern; dieser hat den Radius  $2r$ , und sein Mittelpunkt liegt spiegelbildlich zu  $O$  bezüglich  $M$ .

nachzuweisen, so hat man die dazu äquivalente Berührungseigenschaft des Feuerbach-Kreises mit dem Inkreis bestätigt, die in Abschnitt 2 als bekannt angenommen wurde.

Beachtet man zu diesem Zweck – die Dreieckswinkel mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnend –, dass  $\sphericalangle HAB = \sphericalangle CAM = \beta - (\pi/2)$ , also  $\sphericalangle HAM = \alpha + 2\beta - \pi = \beta - \gamma$  (Fig. 2), so hätte man die Beziehung

$$(r - 2\rho)^2 = [r \cos(\beta - \gamma) - 2\rho]^2 + [r \sin(\beta - \gamma) - (b - c)]^2 \quad (3)$$

nachzuprüfen. Mit Rücksicht auf  $b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2r$  läuft dies nach Ausquadrieren auf die Behauptung

$$\rho [1 - \cos(\beta - \gamma)] = r(\sin\beta - \sin\gamma) [\sin(\beta - \gamma) - (\sin\beta - \sin\gamma)] \quad (4)$$

hinaus. Nach geläufigen trigonometrischen Umformungen ist (4) gleichbedeutend mit

$$\frac{\rho}{r} = 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \left( \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (5)$$

was gemäss (2b) tatsächlich eine richtige Formel ist. Damit ist also ein Beweis für die Berührungseigenschaft des Feuerbach-Kreises gewonnen, wie er ähnlich in [4], S. 384f., geführt wurde.

In ähnlicher Weise liesse sich auch die Eulersche Formel (1) durch Anwendung des Kosinussatzes im Dreieck  $MAO$  mit Bedachtnahme auf  $\overline{AO} = \rho/\sin(\alpha/2)$  auf die Relation (5) zurückführen.

7. Zur später noch benötigten quantitativen Erfassung der Wanderung der in Satz 1 genannten merkwürdigen Punkte auf ihren Bahnkreisen sei die eindreideutige Beziehung zwischen einem von ihnen, etwa dem Nagelschen Punkt  $N$ , und den Ecken des Dreiecks  $ABC$  genauer analysiert. Zu diesem Zweck werden die von der Zentrale  $OM$  aus gemessenen Richtungswinkel  $\varphi$  und  $\psi$  der zur Ecke  $A$  zielenden Strahlen  $MA$  bzw.  $OA$  eingeführt (Fig. 1). Durch  $d = \overline{OM}$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sind mit Beachtung von (1) Um- und Inkreis sowie ein Dreieck  $ABC$  der Poncelet-Schar festgelegt, und es muss daher möglich sein, alle benötigten Stücke durch diese Daten auszudrücken.

Die Anwendung des Sinussatzes im Hilfsdreieck  $AOM$  liefert über

$$d : r : \rho \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = \sin(\varphi - \psi) : \sin\psi : \sin\varphi \quad (6)$$

und die Eulersche Formel (1) zunächst

$$r = \frac{d \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}, \quad r - 2\rho = \frac{d^2}{r} = \frac{d \cdot \sin(\varphi - \psi)}{\sin\psi}, \quad (7)$$

und weiterhin nach einfachen Umformungen:

$$\rho = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin \varphi \sin(2\psi - \varphi)}{\sin \psi \sin(\varphi - \psi)}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(2\psi - \varphi)}{2 \sin \psi}. \quad (8)$$

Beachtet man ferner die in Abschnitt 6 erkannte Beziehung  $\sphericalangle HAO = \sphericalangle OAM = (\beta - \gamma)/2$ , so kann man die noch fehlenden Dreieckswinkel  $\beta, \gamma$  aus

$$\beta + \gamma = \pi - \alpha, \quad \beta - \gamma = 2\varphi - 2\psi \quad (9)$$

ermitteln. – Um nun den Nagelschen Punkt  $N$  zu erfassen, dessen Entfernung  $r - 2\rho$  vom Umkreiszentrum  $M$  bereits bekannt ist, fälle man aus  $M$  und  $N$  die Lote auf die durch  $A$  gehende, zu  $BC$  parallele Seite des Aussendreiecks; ihre Fusspunkte seien mit  $M'$  und  $N'$  bezeichnet. Wegen  $\sphericalangle M'MA = \sphericalangle HAM = \beta - \gamma$  und (9) beträgt der Richtungswinkel von  $MM'$  gegen die Zentrale  $\frac{\varphi - (\beta - \gamma)}{2} = 2\psi - \varphi$  (Fig. 2). Zur Bestimmung des Winkels  $\chi = \sphericalangle M'MN$  über  $\sin \chi = \overline{M'N'}/\overline{MN}$  findet man mit Rücksicht auf (7) und (9):

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \frac{r[\sin(\beta - \gamma) - 2(\sin \beta - \sin \gamma)]}{r - 2\rho} \\ &= \frac{2r^2}{d^2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \left( \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\ &= \frac{2r^2}{d^2} \sin(\varphi - \psi) \left[ \cos(\varphi - \psi) - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right] \\ &= \frac{2 \sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)} [\cos(\varphi - \psi) \sin \psi + \sin(\varphi - 2\psi)] = 2 \sin \psi \cos \psi = \sin 2\psi. \quad (10) \end{aligned}$$

Hieraus folgt das überraschend einfache Ergebnis  $\chi = 2\psi$ ; die andere Möglichkeit  $\chi = \pi - 2\psi$  scheidet aus Stetigkeitsgründen aus, weil  $\psi = 0$  den Wert  $\chi = 0$  bedingen muss. Damit hat man für den von der Zentrale aus gemessenen *Richtungswinkel*  $\omega$  der untereinander parallelen Radien  $MN, EH, OF$  und  $RS$  den Wert

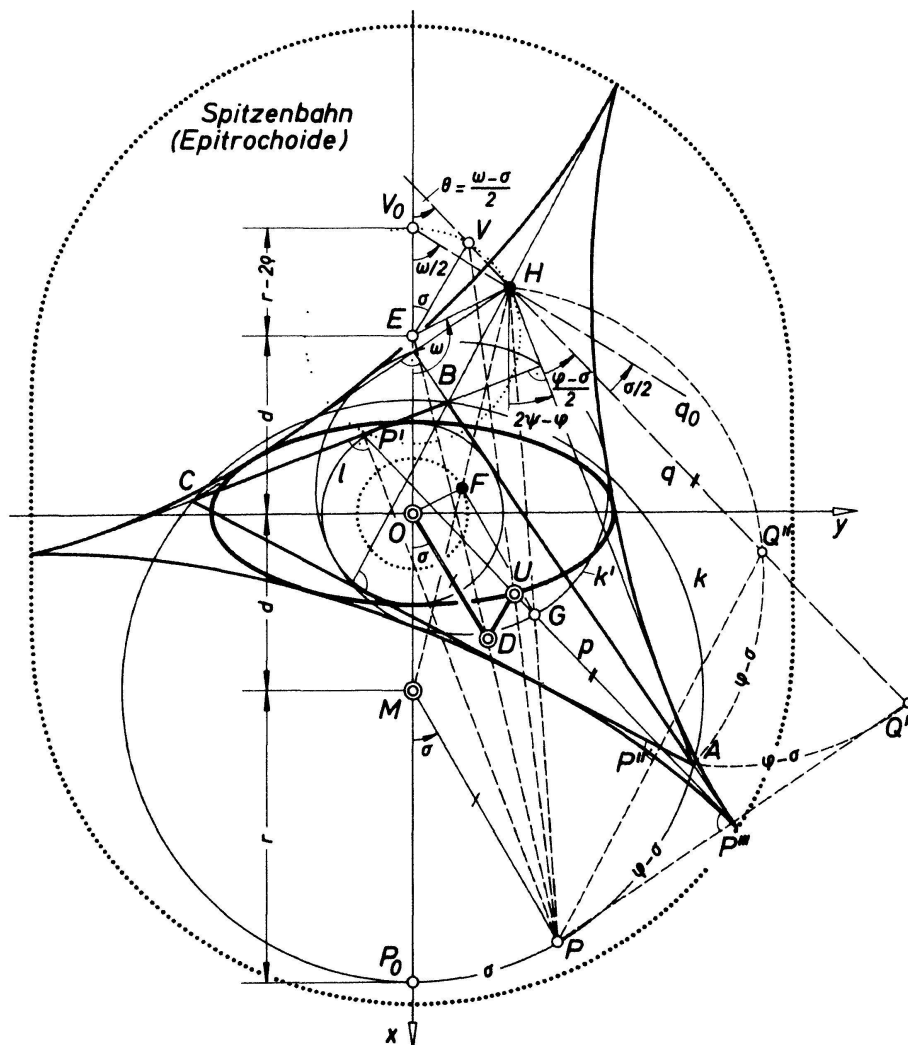
$$\omega = 2\psi - \varphi + \chi = 4\psi - \varphi. \quad (11)$$

Aufgrund dieser Formel ist man jetzt in der Lage, in einer Poncelet-Schar jenes Dreieck zu finden, das zu einem auf seinem Bahnkreis angenommenen merkwürdigen Punkt gehört. Zu dem gewählten Richtungswinkel  $\omega$  ist nämlich der entsprechende Winkel  $\psi$  gemäss (6) und (10) aus der goniometrischen Gleichung

$$d \sin \psi = r \sin(3\psi - \omega) \quad (12)$$

zu berechnen, die nach Algebraisierung mit  $\text{tg } \psi = t$  auf eine kubische Gleichung führt. Auf diese Weise mag man eine «reguläre» Folge von Dreiecken einer Poncelet-Schar einrichten, indem man etwa die Schwerpunkte regulär auf ihrem Trägerkreis verteilt. So entstand die viergliedrige reguläre Folge in Figur 1 mit  $\omega = i\pi/2$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

8. Werden aus einem Punkt  $P$  des Umkreises  $k$  die Lote auf die Seiten des Dreiecks  $ABC$  gefällt, so liegen die drei Fusspunkte  $P', P''$  und  $P'''$  nach einem Satz von W. Wallace (1799) auf einer Geraden  $p$ , die oft fälschlich R. Simson zugeschrieben wird [1], S. 1234ff. Zum Beweis betrachte man statt der Fusspunkte die Spiegelpunkte  $Q', Q'', Q'''$  von  $P$  an den Urseiten. Sie gehören den entsprechenden Spiegelbildern des Umkreises an, die allesamt durch den Höhenschnittpunkt  $H$  gehen, wie aus einfachen Winkelbeziehungen folgt (Fig. 3). Bezeichnet  $\sigma$  den von der Zentrale aus gemessenen Richtungswinkel des Halbmessers  $MP$ , so gehört zu den kongruenten Kreisbögen  $PA, AQ''$  und  $AQ'''$  der gemeinsame Umfangswinkel  $(\varphi - \sigma)/2$ , und  $\sphericalangle AHQ'' = \sphericalangle AHQ'''$  besagt, dass  $Q''$  und  $Q'''$  auf einer Geraden  $q$  durch  $H$  liegen, der aus Gründen der Gleichberechtigung auch



Figur 3. Wallace-Geraden und Steiner-Zykloide ( $r = 8, \rho = 2,5$ ).



$Q'$  angehört. Zentrische Verkleinerung auf die Hälfte von  $P$  aus führt dann  $q$  in die Wallace-Gerade  $p$  über; diese enthält auch den  $H$  entsprechenden Punkt  $G$  des Feuerbach-Kreises  $k'$ .

Der gemeinsame Richtungswinkel  $\theta$  der parallelen Geraden  $p$  und  $q$  beträgt

$$\theta = 2\psi - \varphi + \frac{\varphi - \sigma}{2} = \frac{\omega - \sigma}{2}. \quad (13)$$

Vergleich mit dem Richtungswinkel  $\sigma$  der parallelen Radien  $MP$  und  $FG$  lehrt: Durchläuft  $P$  den Umkreis  $k$  mit der Winkelgeschwindigkeit 1, dann dreht sich die Wallace-Gerade  $p$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $-1/2$  um ihren Punkt  $G$ , der seinerseits auf dem Feuerbach-Kreis  $k'$  mit der Winkelgeschwindigkeit 1 wandert. In der Ausdrucksweise der Kinematik unterliegt demnach die Gerade  $p$  einer sogenannten Planetenbewegung (Kreisrollung), so dass sie eine gespitzte Radlinie einhüllt [7], S. 157; im vorliegenden Fall ist dies eine dreispitzige Hypozykloide, unter dem Namen *Steiner-Zykloide* wohlbekannt [1], S. 1237f. Ihre Scheitel liegen auf dem Feuerbach-Kreis, ihre Spitzen auf einem dreimal so grossen. Diese Zykloide berührt auch die Dreieckshöhen und -seiten, die sich nämlich als Wallace-Geraden einstellen, wenn  $P$  die Ecken des Dreiecks bzw. die ihnen gegenüberliegenden Umkreisstellen passiert. Die Spitzentangenten ergeben sich, wenn die Wallace-Gerade  $p$  durch das Zykloidenzentrum  $F$  geht, wenn also ihr Richtungswinkel  $\theta$  (13) bis auf Vielfache von  $\pi$  mit  $\sigma$  übereinstimmt; dies tritt ein für

$$3\sigma = 4\psi - \varphi = \omega \pmod{2\pi}. \quad (14)$$

9. Nunmehr soll umgekehrt untersucht werden, wie sich die Wallace-Gerade eines festen Umkreispunktes  $P$  ändert, wenn das Dreieck eine Poncelet-Schar durchläuft. Zu diesem Zweck mögen zunächst die speziellen Verhältnisse für den zu  $\sigma=0$  gehörigen Umkreispunkt  $P_0$  auf der Zentrale  $OM$  geklärt werden (Fig. 3). Dessen Wallace-Gerade  $p_0$  sowie die dazu parallele Spiegelpunktgerade  $q_0$  haben gemäss (13) den Richtungswinkel  $\theta_0 = \omega/2$ . Im Hinblick auf den Ortskreis des Höhenschnittpunktes  $H$  (Abschnitt 3) und den Richtungswinkel  $\omega$  des Halbmessers  $EH$  bedeutet dies, dass die  $H$  enthaltende Gerade  $q_0$  für sämtliche Dreiecke der Poncelet-Schar durch einen auf der Zentrale liegenden, also festen Umfangspunkt  $V_0$  des genannten Kreises geht. Für seine Entfernung von  $P_0$  findet man  $\overline{P_0V_0} = 2(r+d-\rho)$ .

Die zu einem beliebigen, durch den Richtungswinkel  $\sigma$  festgelegten Punkt  $P$  auf  $k$  gehörige Spiegelpunktgerade  $q$  schliesst mit  $q_0$  den Winkel  $\theta - \theta_0 = \sigma/2$  ein, enthält also gleichfalls für sämtliche Dreiecke der Poncelet-Schar einen festen Umfangspunkt  $V$  des Bahnkreises von  $H$  (Fig. 3); seine Lage ist durch  $\sphericalangle VEV_0 = \sigma$  fixiert.

Die zentrisch-ähnliche Verkleinerung im Maßstab 1:2 vom (festen) Punkt  $P$  aus, die  $q$  in die Wallace-Gerade  $p$  überführt, lässt erkennen, dass auch letztere ein Strahlbüschel durchläuft, wenn das Dreieck im Rahmen der Poncelet-Schar variiert. Der Büschelscheitel  $U$  halbiert die Strecke  $PV$  und hat von dem  $E$  entsprechen-

den Punkt  $D$  die Entfernung  $(r-2\rho)/2$ , wobei  $DU \parallel EV$  den Richtungswinkel  $\pi - \sigma$  aufweist. Die zentrische Verdopplung von  $E$  aus lehrt wiederum, dass die Strecke  $OD \parallel MP$  die Länge  $r/2$  und den Richtungswinkel  $\sigma$  besitzt (Fig.3). Damit lässt sich nun die Veränderung des Büschelscheitels  $U$  beurteilen: Seine Ortslinie ist die Bahn des Endpunktes eines in  $O$  befestigten gelenkigen Stabpaars  $ODU$ , dessen Glieder sich mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten drehen; es handelt sich demnach um eine *Ellipse*  $u$  mit den Halbachsen  $\overline{OD} \pm \overline{DU} = r - \rho$  bzw.  $\rho$  [7], S.41f. Für ihre lineare Exzentrizität  $e$  findet man über  $e^2 = (r - \rho)^2 - \rho^2 = r^2 - 2r\rho$  durch Vergleich mit (1) den Wert  $e = d$ . Zusammengefasst hat man mithin den

**Satz 2.** *Durchläuft ein (nicht gleichseitiges) Dreieck eine Poncelet-Schar, so überstreicht die Wallace-Gerade  $p$  eines festen Umkreispunktes  $P$  ein Strahlbüschel. Die den verschiedenen Lagen von  $P$  entsprechenden Büschelscheitel  $U$  erfüllen eine Ellipse  $u$  mit den Halbachsen  $r - \rho$  und  $\rho$ , welche die Zentrale zur Nebenachse und den Inkreis zum Nebenscheitelkreis hat.*

10. Die folgende Schlussbemerkung stammt von W. Wunderlich (Wien), der die vorliegende Mitteilung durch Hinweise und Ratschläge gefördert hat.

In jenem kartesischen Koordinatensystem, welches das Inkreiszentrum  $O$  zum Ursprung und die Zentrale  $OM$  zur Abszissenachse hat, kommen dem Büschelscheitel  $U$  aus Satz 2 gemäss Figur 3 die Koordinaten

$$X = \rho \cos \sigma, \quad Y = (r - \rho) \sin \sigma \quad (15)$$

zu; sie lassen die Bindung von  $U$  an eine Ellipse  $u$  erkennen. Die zu dem durch den Winkel  $\sigma$  festgelegten Umkreispunkt  $P$  gehörige Wallace-Gerade  $p$  des durch den Parameterwert  $\omega$  gekennzeichneten Dreiecks hat gemäss (13) den Richtungswinkel  $\theta = (\omega - \sigma)/2$  und daher die Gleichung

$$(x - X) \sin \theta = (y - Y) \cos \theta, \quad (16)$$

also zufolge (15):

$$x \sin \theta - y \cos \theta = \rho \sin(\sigma + \theta) - r \sin \sigma \cos \theta. \quad (17)$$

Die aus dieser zweiparametrischen Geradenmenge durch die Forderung  $\sigma = \text{const}$  herausgegriffene Geradenschar ist das *Strahlbüschel* mit dem Scheitel  $U$  (15). Dasselbe enthält naturgemäss auch die durch (partielle) Ableitung nach  $\theta$  zu gewinnende, zu  $p$  normale Gerade

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho \cos(\sigma + \theta) + r \sin \sigma \sin \theta. \quad (18)$$

Die Bedingung  $\sigma + 2\theta = \omega = \text{const}$  hingegen liefert die Tangentenschar der in Abschnitt 8 erwähnten *Steiner-Zykloide*. Die Ableitung von (17) nach  $\theta$  gibt -

unter Beachtung von  $d\sigma/d\theta + 2 = 0$  - die den Berührungspunkt von  $p$  (17) mit der Steiner-Zykloide enthaltende Normale

$$x \cos\theta + y \sin\theta = -\rho \cos(\sigma + \theta) + 2r \cos\sigma \cos\theta + r \sin\sigma \sin\theta. \quad (19)$$

Fragt man nun, wann dieser Berührungspunkt mit dem Büschelscheitel  $U$  zusammenfällt, so hat man zu prüfen, wann die rechten Seiten von (18) und (19) übereinstimmen. Dies tritt ein für

$$\rho \cos(\sigma + \theta) = r \cos\sigma \cos\theta, \quad (20)$$

also für

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho - r}{\rho} \cot\sigma. \quad (21)$$

Man bestätigt unschwer, dass in dem betreffenden Punkt  $U$ , welcher der Ellipse  $u$  und der zu  $\omega$  gehörigen Steiner-Zykloide gemeinsam ist, *Berührung* zwischen diesen beiden Kurven besteht, weil die durch (21) gegebene Richtungskonstante der Zykloidentangente  $p$  mit jener der Ellipsentangente übereinstimmt. Für letztere folgt nämlich aus (15):

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(r - \rho) \cos\sigma}{-\rho \sin\sigma} = \frac{\rho - r}{\rho} \cot\sigma. \quad (22)$$

Die Berührung der Zykloide mit der Ellipse erfolgt übrigens an *drei Stellen*, denn zu vorgegebenem  $\omega$  gehören drei die Bedingung (21) erfüllende Werte  $\sigma$ , wie man durch Algebraisierung der Gleichung (21) mittels  $\operatorname{tg}(\sigma/2) = t$  erkennt. - Die Steiner-Zykloiden aller Dreiecke der Poncelet-Schar sind übrigens untereinander *kongruent*, weil ihre Scheitelkreise die Feuerbach-Kreise sind und diese allesamt den Radius  $r/2$  besitzen. Unter Hinweis auf den in Abschnitt 2 erkannten Bahnkreis des das Zykloidenzentrum darstellenden Feuerbachschen Punktes  $F$  und die durch (14) bestimmten Richtungswinkel  $(\omega + 2i\pi)/3$  ( $i=0, 1, 2$ ) der Spitzentangenten lässt sich daher aussprechen der

**Satz 3.** *Durchläuft ein (nicht gleichseitiges) Dreieck eine Poncelet-Schar, so vollführt die als Einhüllende seiner Wallace-Geraden auftretende Steiner-Zykloide eine Planetenbewegung, bei welcher sie sich um ihr im Feuerbachschen Punkt befindliches Zentrum dreht, während dieses mit der dreifachen Winkelgeschwindigkeit auf einem zum Inkreis konzentrischen Kreis wandert. Sie hüllt während dieser Bewegung die in Satz 2 genannte Ellipse ein, die sie jeweils an drei Stellen berührt. Ihre drei Spitzen laufen gemeinsam auf einer gestreckten Epitrochoide, während die drei Spitzentangenten eine gemeinsame Hüllbahn in Gestalt einer Astroide erzeugen.*

Die erwähnte Planetenbewegung ist genau die gleiche, die der Drehkolben des vieldiskutierten *Wankelmotors* vollführt [7], S.154 und 224ff. Die Spitzenbahn wird gemäss Figur 3 in Parameterform durch

$$x = \left(\frac{r}{2} - \rho\right) \cos \omega + \frac{3r}{2} \cos \frac{\omega}{3}, \quad y = \left(\frac{r}{2} - \rho\right) \sin \omega + \frac{3r}{2} \sin \frac{\omega}{3} \quad (23)$$

beschrieben, die als Einhüllende der Spizentangenten auftretende Astroide (vier-spitzige Hypozykloide) durch

$$x = -\frac{m}{2} \left(\cos \omega + 3 \cos \frac{\omega}{3}\right), \quad y = -\frac{m}{2} \left(\sin \omega - 3 \sin \frac{\omega}{3}\right) \quad \text{mit} \quad m = \frac{r}{2} - \rho. \quad (24)$$

Satz 3 steht überdies in gewissem Zusammenhang mit Untersuchungen von Fréchet [3], welche die Beweglichkeit einer starren Ellipse in einer sie dreifach berührenden Steiner-Zykloide erkennen lassen und die von Wunderlich [6], Meyer [5] und anderen verallgemeinert wurden. Ernst Ungethüm, Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Berkhan und W.F. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. Enzykl. Math. Wiss. IIIAB10.
- 2 F. Dingeldey: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Enzykl. Math. Wiss. IIIC1.
- 3 M. Fréchet: Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. 61, 206-217 (1902).
- 4 R. Henke und R. Heger: Schloemilchs Handbuch der Mathematik, I., 2. Aufl. Leipzig 1904.
- 5 P. Meyer: Über Hüllkurven von Radlinien. Arch. Math. 18, 651-662 (1967).
- 6 W. Wunderlich: Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien. Math. Nachr. 20, 373-380 (1959).
- 7 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Hochschultaschenbücher, Bd. 447. Mannheim, Wien, Zürich 1970.

## On the diophantine equations $2y^2 = 7^k + 1$ and $x^2 + 11 = 3^n$

Certain diophantine equations have played an important role in the recent development of the mathematical theory of error-correcting codes. One of these equations is

$$2y^2 = 7^k + 1, \quad (1)$$

for which Alter [1] has proved the following result.

**Theorem 1.** *The only solutions in positive integers  $y, k$  of the equation (1) are (2, 1) and (5, 2).*

Alter's proof, which is based on the theory of continued fractions, is quite long and complicated. Therefore, it may be of some interest that theorem 1 can be