

On the diophantine equations $2y^2 = 7k + 1$ and $x^2 + 11 = 3n$

Autor(en): **Inkeri, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 5

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33809>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$x = \left(\frac{r}{2} - \rho\right) \cos \omega + \frac{3r}{2} \cos \frac{\omega}{3}, \quad y = \left(\frac{r}{2} - \rho\right) \sin \omega + \frac{3r}{2} \sin \frac{\omega}{3} \quad (23)$$

beschrieben, die als Einhüllende der Spitzentangenten auftretende Astroide (vier-spitzige Hypozykloide) durch

$$x = -\frac{m}{2} \left(\cos \omega + 3 \cos \frac{\omega}{3}\right), \quad y = -\frac{m}{2} \left(\sin \omega - 3 \sin \frac{\omega}{3}\right) \quad \text{mit} \quad m = \frac{r}{2} - \rho. \quad (24)$$

Satz 3 steht überdies in gewissem Zusammenhang mit Untersuchungen von Fréchet [3], welche die Beweglichkeit einer starren Ellipse in einer sie dreifach berührenden Steiner-Zykloide erkennen lassen und die von Wunderlich [6], Meyer [5] und anderen verallgemeinert wurden. Ernst Ungethüm, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Berkhan und W.F. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. Enzykl. Math. Wiss. IIIAB10.
- 2 F. Dingeldey: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Enzykl. Math. Wiss. IIIC1.
- 3 M. Fréchet: Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. 61, 206-217 (1902).
- 4 R. Henke und R. Heger: Schloemilchs Handbuch der Mathematik, I., 2. Aufl. Leipzig 1904.
- 5 P. Meyer: Über Hüllkurven von Radlinien. Arch. Math. 18, 651-662 (1967).
- 6 W. Wunderlich: Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien. Math. Nachr. 20, 373-380 (1959).
- 7 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Hochschultaschenbücher, Bd. 447. Mannheim, Wien, Zürich 1970.

On the diophantine equations $2y^2 = 7^k + 1$ and $x^2 + 11 = 3^n$

Certain diophantine equations have played an important role in the recent development of the mathematical theory of error-correcting codes. One of these equations is

$$2y^2 = 7^k + 1, \quad (1)$$

for which Alter [1] has proved the following result.

Theorem 1. *The only solutions in positive integers y, k of the equation (1) are (2, 1) and (5, 2).*

Alter's proof, which is based on the theory of continued fractions, is quite long and complicated. Therefore, it may be of some interest that theorem 1 can be

demonstrated very briefly by appealing to the following theorem of Ljunggren's [8].

Theorem 2. *The diophantine equation*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^2 \quad (n > 2)$$

is impossible in integers $x, y, |x| > 1$ with the exception of the cases $n=4, x=7$ and $n=5, x=3$.

This theorem is based on a fairly comprehensive theory which is, however, completely elementary.

In order to prove theorem 1 it is enough to show that (1) is impossible for $k > 2$. Suppose that (1) holds for some integers $y > 0, k > 2$. We distinguish three cases.

If k is odd, then $2|y$, i.e. $y=2y_1$ with a positive integer y_1 . Now (1) can be written in the form

$$\frac{(-7)^k - 1}{-7 - 1} = y_1^2.$$

By theorem 2 this is impossible.

If $k=2(2h+1)$ with h an integer > 0 , then $(7^2+1)|(7^k+1)$. Hence $5|y$, i.e. $y=5y_2$, and (1) takes the form

$$\frac{(-49)^{2h+1} - 1}{-49 - 1} = y_2^2.$$

Again, by Ljunggren's theorem, this is impossible because of $h > 0$. Lastly, let $k=4h$. Now (1) becomes $(7^h)^4 + 1 = 2y^2$. This equation is impossible, since $h > 0$ and the only integer solutions of $x^4 + y^4 = 2z^2$ with $(x, y) = 1$ are given by $x^2 = y^2 = 1$ (cf. e.g. [9], p. 18). This completes the proof of theorem 1.

We shall now deal with the equation

$$x^2 + 11 = 3^n, \tag{2}$$

for which the following result holds.

Theorem 3. *The only positive integer solution of equation (2) is given by $(x, n) = (4, 3)$.*

It seems that the first proof for this theorem is given by Alter and Kubota [2]. [An error in the proof of the case $n \equiv 7 \pmod{10}$ was later corrected by the second author [5]. By the way, we may note that the correction can be demonstrated very briefly as follows: Since $3|n$, we have $n \equiv -3 \pmod{30}$ and so, by (2) and Fermat's theorem, $3^3 x^2 \equiv 3^{n+3} + 4 \cdot 11 \equiv -48 \pmod{31}$ or $(3x)^2 + 4^2 \equiv 0 \pmod{31}$, which is impossible, since $(-1/31) = -1$.]

Very recently Cohen [4] has proved theorem 3 using the interesting method developed by Hasse [6]. However, an earlier proof given by Cohen and Ljunggren [3] is much simpler. Our following proof is slightly dissimilar to the latter.

Firstly we show that $3|n$. The equation (2) can be written in the forms

$$x^2+8=3(3^{n-1}-1), \quad x^2+2=9(3^{n-2}-1).$$

The right-hand side is divisible by $3^3-1 (=2 \cdot 13)$ in the first equation for $n \equiv 1 \pmod{3}$ and in the second one for $n \equiv 2 \pmod{3}$. But $(-2/13) = -1$ and thus the cases $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ are excluded. Now (2) has the form $x^2+11=y^3$. We do not wish to make use of the well-known result [7] that the only solutions in positive integers of this equation are given by (4, 3) and (58, 15), but we carry through the proof completely.

In the quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ unique factorization holds, the only units are ± 1 , and $\text{g.c.d.}(x+\sqrt{-11}, x-\sqrt{-11})=1$, whence

$$x+\sqrt{-11}=\left(\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\right)^3, \quad 4y=a^2+11b^2, \quad (3)$$

where a, b are rational integers. From these equations it follows that

$$3a^2b-11b^3=8, \quad a^2b-by=2.$$

Hence $|b|=1$ or 2 and so $a^2=1$ or 16 , respectively. The second equation in (3) then gives $y=3, x=4$ and $y=15, x=58$ as only solutions of $x^2+11=y^3$. Since y is a power of 3 in the case we are considering, it follows that $x=4, n=3$ is the only solution of (2).

K. Inkeri, University of Turku, Finland

REFERENCES

- 1 R. Alter: On the nonexistence of close-packed double Hamming error-correcting codes on $q=7$ symbols. *J. Comput. Syst. Sci.* 2, 169-176 (1968).
- 2 R. Alter and K.K. Kubota: The diophantine equation $x^2+11=3^n$ and a related sequence. *J. Number Theory* 7, 5-10 (1975).
- 3 E.L. Cohen: Sur l'équation diophantienne $x^2+11=3^k$. *C.r. Acad. Sci. Paris (A)* 275, 5-7 (1972).
- 4 E.L. Cohen: The diophantine equation $x^2+11=3^k$ and related questions. *Math. Scand.* 38, 240-246 (1976).
- 5 E.L. Cohen: Review of [2], MR 51, No. 344, p. 48 (1976).
- 6 H. Hasse: Über eine diophantische Gleichung von Ramanujan-Nagell und ihre Verallgemeinerung. *Nagoya Math. J.* 27, 77-102 (1966).
- 7 O. Hemer: On the diophantine equation $y^2-k=x^3$. *Doct. Diss., Uppsala* 1952.
- 8 W. Ljunggren: Noen setninger om ubestemte likninger av formen $(x^n-1)/(x-1)=y^q$. *Norsk. Mat. Tidsskr. I*, H. 25, 17-20 (1943).
- 9 L.J. Mordell: *Diophantine equations*. Academic Press, New York, London 1969.