Eine Erweiterung der Stewartschen Formel

Autor(en): **Bottema, O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33811

Elementarmathematik und Didaktik

Eine Erweiterung der Stewartschen Formel

1. In einer geodätischen Arbeit [1] benutzte W. Wunderlich das folgende Lemma: Wenn die vier Punkte A_i ($i=1$, 2, 3, 4) in der Ebene U liegen und A ein fünfter Punkt ausserhalb U ist, dann besteht eine lineare Beziehung zwischen den Quadraten der Entfernungen $AA_i=r_i$, wobei die Koeffizienten der r_i^2 von den A_i, aber nicht von A abhängen. Für dieses Lemma soll ein anderer Beweis sowie die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen mitgeteilt werden.

2. Sei $OXYZ$ ein rechtwinkliges Achsenkreuz; U habe die Gleichung $z=0$, O sei die Normalprojektion von A auf U, OX und OY beliebig in U, $A_i=(x_i,y_i)$, $\overline{OA}=h$. Dann ist

$$r_i^2=h^2+x_i^2+y_i^2, \qquad i=1,2,3,4. \tag{1}$$

Bezeichnet F_1 den Flächeninhalt des (orientierten) Dreiecks $A_2A_3A_4$, dann ist

$$2F_1=D_1=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Die Inhalte von $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ und $A_1A_2A_3$ seien entsprechend F_2, F_3, F_4. Aus $|1\ x_i\ y_i\ 1|=0$, $i=1,2,3,4$, folgt

$$F_1-F_2+F_3-F_4=0. \tag{3}$$

Wir nehmen an, dass keine drei Punkte A_i kollinear sind; dann ist $F_i\neq 0$, $i=1$, 2, 3, 4. Multiplikation von (1) mit $F_1, -F_2, F_3, -F_4$ und Summierung gibt

$$F_1r_1^2-F_2r_2^2+F_3r_3^2-F_4r_4^2=\frac{1}{2}D, \tag{4}$$

wobei

$$D=\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Wir zeigen, dass auch D nur von den vier Punkten A_i abhängt und nicht von A oder O. Der Umkreis C_1 von $A_2A_3A_4$ hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_i^2+y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad i=2,3,4. \tag{6}$$

Der Koeffizient von x^2+y^2 in (6) ist D_1; die Gleichung (6) wird also normiert, wenn man durch D_1 teilt. Substituiert man danach x_1, y_1, dann erhält man bekanntlich die Potenz m_1 von A_1 in bezug auf C_1. Wir haben also $D/2=m_1 F_1$. Weiterhin ist $m_1 F_1=-m_2 F_2=m_3 F_3=-m_4 F_4$. Wir bemerken noch, dass das rechte Glied in (4) dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte A_i auf einem Kreis liegen.

3. Man kann (4) zu einem Satz im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n erweitern: gehören die $(n+1)$ Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene U von E_n an und ist A ein Punkt ausserhalb U und $\overline{AA_i}=r_i$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$, dann gilt

$$F_1 r_1^2 - F_2 r_2^2 + \cdots (-1)^n F_{n+1} r_{n+1}^2 = (-1)^{k+1} m_k F_k. \tag{7}$$

Dabei ist F_i der Inhalt des (als nichtsingulär vorausgesetzten) Simplexes S_i, das entsteht, wenn man aus der Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ den Punkt A_i entfernt; k ist eine beliebige Zahl aus $\{1,2,\ldots,(n+1)\}$, und m_k ist die Potenz von A_k in bezug auf die S_k umschriebene Hypersphäre C_k.

4. Der Satz gilt übrigens auch für $n=2$. Sind A_1, A_2, A_3 drei Punkte auf der X-Achse U in E_2 und ist A ein Punkt ausserhalb U, dann hat man $F_1=A_3 A_2 = x_2 - x_3$, $F_2=A_3 A_1$, $F_3=A_2 A_1$ (mit $F_1-F_2+F_3=0$); das rechte Glied von (7) lautet nun

$$D=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_1) = A_2 A_3 \cdot A_3 A_1 \cdot A_1 A_2,$$

so dass

$$A_3 A_2 \cdot AA_1^2 + A_1 A_3 \cdot AA_2^2 + A_2 A_1 \cdot AA_3^2 + A_3 A_2 \cdot A_1 A_3 \cdot A_2 A_1 = 0. \tag{8}$$

Dies ist die sogenannte Stewartsche Formel der Elementargeometrie.

5. Für $n=3$ kann man dem rechten Glied von (4) noch eine andere Gestalt geben. A_4 sei ein Punkt in der Ebene U des Dreiecks $\Delta_4=A_1 A_2 A_3$ vom Inhalt F_4, M_4 der Umkreismittelpunkt, R_4 der Umkreisradius und F_4' der Inhalt des Fusspunktdreiecks von A_4 in bezug auf Δ_4. Dann ist nach einer Formel von Gergonne [2]

$$F_4' = F_4 \frac{R_4^2 - M_4 A_4^2}{4 R_4^2} = -\frac{m_4 F_4}{4 R_4^2} \tag{9}$$

und deshalb

$$F_1 \cdot AA_1^2 - F_2 \cdot AA_2^2 + F_3 \cdot AA_3^2 - F_4 \cdot AA_4^2 = 4 R_4^2 F_4'. \tag{10}$$

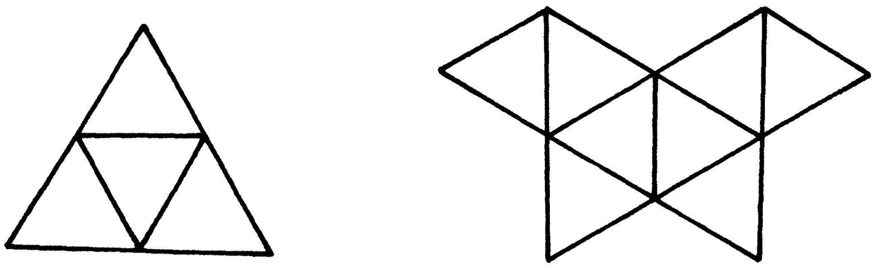
Das rechte Glied verschwindet genau dann, wenn A_4 auf dem Umkreis von $\triangle_4$ liegt: dann ist $F_4' = 0$ nach dem Satz von Wallace. O. Bottema, Delft

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Wunderlich: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten. Sber. öst. Akad. Wiss. *186*, 263-280 (1977).
2 R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry, S. 139-140. Dover Publications, New York 1960.

Über zwei besondere Eigenschaften von Dreiecksflächnernetzen

1. Als Dreiecksflächner sollen im folgenden Polyeder bezeichnet werden, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Polyedern sind z. B. Tetraeder und Oktaeder. Von ihnen kann man sich ein Papiermodell herstellen, indem man die in Abb. 1a und 1b wiedergegebenen Figuren auf ein Stück Papier zeichnet, sie entlang der Randstrecken ausschneidet, sie längs der inneren Strecken faltet und je zwei Randstrecken geeignet miteinander verklebt. Aus diesem Grund heissen die Figuren Tetraedernetz bzw. Oktaedernetz.



a) Abb. 1 b)

In [1] bewies M. Jeger, dass es bei Verwendung von Papier mit ununterscheidbaren Seiten elf verschiedene Oktaedernetze gibt. Er nutzte dabei die Tatsache aus, dass es ebenso viele solche Netze gibt wie (in bezug auf die volle Symmetriegruppe) inäquivalente Gerüste des Eckpunkt-Kanten-Graphen des Oktaeders. Im folgenden wird gezeigt, dass ein solch eindeutiger Zusammenhang nicht bei allen Dreiecksflächnern gegeben ist, denn es gibt Dreiecksflächner, bei denen Schnitte entlang den Kanten inäquivalenter Gerüste zu demselben Netz (als Figur betrachtet) führen. Bei solchen Netzen ist daher – wie auch in der Literatur üblich – eine zusätzliche Angabe erforderlich, welche Kanten (bzw. Ecken) beim Zusammenkleben zu identifizieren sind.
Weiterhin wird gezeigt, dass diese Forderung auch noch aus einem anderen Grund sinnvoll sein kann: Es gibt nämlich Netze von Dreiecksflächnern, die zu verschiedenen Körpern zusammengeklebt werden können.

2. Wir untersuchen zunächst Netze des Tetraederzwillings, d.h. der aus zwei Tetraedern zusammengesetzten Doppelpyramide. Diese ist – bis auf Ähnlichkeit –