Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 1

PDF erstellt am: **09.08.2024**

K est compact et convexe, mais toute courbe $\mathfrak{C}$ avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$ est de longueur infinie. Si

$$K = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \mid \sum_1^\infty j^{100} x_j^2 \leqslant 1 \right\},$$

il existe $\mathfrak{C}$ de longueur finie avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$. En plus, on peut démontrer que si K est convexe compact et $\mathfrak{C}$ de longueur finie avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$, alors il existe une courbe minimale. Cela se fait comme dans le § 3. Il faut simplement montrer que si $\{\mathfrak{C}_n\}$ est une suite minimale de courbes, alors $\bigcup_1^\infty \mathfrak{C}_n$ est relativement compacte.

H. Joris, Genève

BIBLIOGRAPHIE

1 M.H.A. Newman: Elements of the topology of plane sets of points, p.89–92, Cambridge 1964.

Kleine Mitteilungen

Parabeln mit gemeinsamem isotropem Krümmungskreis

Nach Kickinger [2] liegen die Brennpunkte der Parabeln mit gemeinsamem Krümmungskreis k auf einem Kreis, der k im Oskulationspunkt von innen berührt und dessen Durchmesser gleich dem halben Radius von k ist. Im folgenden zeigen wir, dass dieser Sachverhalt sinngemäss auch in der isotropen Geometrie zutrifft.

1. Wir gehen von einem isotropen Kreis j aus, dessen Darstellung o. B. d. A. zu

$$\boldsymbol{y} = \tau \boldsymbol{r}_1 + \frac{\tau^2}{2} \boldsymbol{r}_2 \tag{1}$$

gewählt sei, wobei $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ linear unabhängige reelle Vektoren sind und τ ein reeller Parameter von j sei. Der Vektor $\boldsymbol{r}_2$ gibt dabei die *isotrope Richtung* der sich – im Sinne von F. Kleins «Erlanger Programm» – auf die Gruppe G_5 der isotropen Ähnlichkeiten stützenden isotropen Ebene an. Für eine Einführung in die isotrope Geometrie sei auf die elementare Darstellung von Strubecker [4] verwiesen.
Im affinen Koordinatensystem $\{\boldsymbol{o}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ haben wir gemäss (1) für das j im Punkte $\tau = 0$ oskulierende Kegelschnittnetz

$$x_1^2 + \alpha x_2^2 + 2\beta x_1 x_2 - 2x_2 = 0, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

dessen Parabeln $P(\beta)$ sich für $\alpha = \beta^2$ ergeben.

2. Unter den (eigentlichen) *Brennpunkten* eines Kegelschnittes κ versteht man nach Berwald [1] jene endlichen Punkte von κ, deren Kegelschnittstangenten isotrop sind. Demnach besitzen allgemeine Parabeln, die den durch $\boldsymbol{r}_2$ (auf der Ferngeraden) bestimmten absoluten Punkt nicht enthalten, genau einen Brennpunkt. Seine Verbindungsgerade mit dem Parabelfernpunkt wird als *Hauptachse* bezeichnet [4].

3. Nach (2) gilt für den Brennpunkt $F(\beta)$ einer allgemeinen Parabel $P(\beta)$ die Darstellung

$$\boldsymbol{f}(\beta)=\frac{1}{2}\beta^{-2}(\beta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2).$$

Daraus folgt - analog zum genannten Resultat von Kickinger [2]:
Die Brennpunkte von allgemeinen Parabeln mit gemeinsamem isotropem Krümmungskreis liegen auf einem isotropen Kreis δ, der durch Zentralstreckung mit dem Modul $1/4$ *in den isotropen Krümmungskreis übergeht.*
Während im Euklidischen die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement nach Laurenti [3] eine Steiner-Zykloide einhüllen, gilt hier (einfacher):
Die Hüllkurve der Hauptachsen der Parabeln mit gemeinsamem isotropem Krümmungskreis ist ein isotroper Kreis, der durch Zentralstreckung mit dem Modul -2 *in den isotropen Krümmungskreis j übergeht.*
Dieses sich unmittelbar ergebende Resultat lässt sich insofern erweitern, dass man jene Punkte $X(\beta)$ der Hauptachsen betrachtet, die vom Brennpunkt $F(\beta)$ den festen Abstand λ besitzen. Wegen

$$\boldsymbol{x}(\beta)=\boldsymbol{f}(\beta)+\frac{\lambda}{\beta}(-\beta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)$$

liegen sie auf einem isotropen Kreis $I(\lambda)$, der aus δ durch Schiebung hervorgeht. Lässt man λ variieren, so folgt ohne Mühe:
Der isotrope Hüllkreis der Hauptachsen der Parabeln mit gemeinsamem isotropem Krümmungskreis ist auch Hüllkreis jener isotropen Kreisschar $I(\lambda)$, die Ort derjenigen Punkte $X(\beta)$ der Hauptachsen ist, welche vom Brennpunkt $F(\beta)$ den Abstand λ besitzen.

J. Tölke, UFBa Salvador, Brasilien

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Berwald: Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in einer Minimalebene. Mh. Math. Phys. *26*, 211-228 (1915).
2 W. Kickinger: Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement. El. Math. *18*, 28-29 (1963).
3 F. Laurenti: Sopra una proprietà dell'ipocicloide trouspidata. Period. Mat. (IV) *38*, 155-158, und Archimede *12*, 253-256 (1966).
4 K. Strubecker: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. *15*, 297-306, 343-351, 385-394 (1962/63).

An application of idempotents in the classification of complex algebras

As is well known, the complex numbers $\mathbf{C}$ form a complex algebra with identity satisfying $|xy| = |x| \cdot |y|$ for all x and y in $\mathbf{C}$. A proof of the following characterization can be found in many of the books which treat Banach algebras (see for example [2], p. 40, [4], p. 39, [5], p. 311).

Theorem 1. *A complex normed algebra $A \neq \{0\}$ with identity satisfying $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ for all $x, y \in A$ is isometrically isomorphic to* $\mathbf{C}$.

The purpose of this expository note is to show, by an elementary argument using idempotents, that the assumption of an identity element can be dropped. This fact is not new (see [1], [3]) but it apparently is not well known and has yet to be included in a textbook treatment of Banach algebras.
The first lemma handles the case when A is commutative.

Lemma 1. *Let $A \neq \{0\}$ be a commutative complex normed algebra satisfying $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ for all $x, y \in A$. Then A is isometrically isomorphic to* $\mathbf{C}$.

Proof: By the assumed norm condition A has no zero divisors. Let $B = A \setminus \{0\}$ and set $T = A \times B$. Since A is commutative we may form the quotient field $D = \{a/b : (a,b) \in T\}$, with the operations $a/b + c/d := (ad + bc)/bd$ and $(a/b)(c/d) := ac/bd$. If $b \in B$, then b/b is the identity element for D.
If $\lambda \in \mathbf{C}$, $a/b \in D$, define $\lambda(a/b) := \lambda a/b$ and $\|a/b\|' := \|a\|/\|b\|$. Then $(D, \|\ \|')$ is a normed algebra with identity satisfying the hypothesis of theorem 1, and hence D is isometrically isomorphic to $\mathbf{C}$. Now, the map $\psi: A \to D$ defined by $\psi(x) = xb/b$ is clearly an isometric algebra homomorphism. To see that ψ is surjective, let $\lambda b/b \in D$ for $\lambda \in \mathbf{C}$, and let $x \in B$. Since $D \simeq \mathbf{C}$, $\psi(x) = xb/b = \mu b/b$ for some nonzero $\mu \in \mathbf{C}$. The element $(\lambda/\mu)x$ in A then maps onto $\lambda b/b$ under ψ. Hence ψ is an isometric isomorphism of A onto $D \simeq \mathbf{C}$.

Lemma 2. *If A is a complex algebra without nonzero nilpotents of order 2 such that A is isomorphic to $\mathbf{C}$ as a vector space, then A has an identity.*

Proof: Since A is a one-dimensional vector space over $\mathbf{C}$, if x is a nonzero element of A, then $A = \mathbf{C}x$. By hypothesis $x^2 \neq 0$, so $A = \mathbf{C}x^2$, i.e., there is a nonzero $\lambda \in \mathbf{C}$ such that $\lambda x^2 = x$. Let $e = \lambda x$ and note that e is idempotent. If $a \in A$, then $a = \mu e$ for some $\mu \in \mathbf{C}$ and $ea = a = ae$.
We are now prepared to prove theorem 1 for algebras which may not possess an identity.

Theorem 2. *Let $A \neq \{0\}$ be a complex normed algebra satisfying $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ for all $x, y \in A$. Then A is isometrically isomorphic to* $\mathbf{C}$.

Proof: Let z be a nonzero element in A, and let $A(z) := \{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j z^j : n \in \mathbf{N}^0, \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}\}$ denote the commutative subalgebra of A it generates. By lemma 1,

$A(z)$ is isometrically isomorphic to $\mathbf{C}$. Hence, $A(z)$ contains a nonzero idempotent e corresponding to 1 in $\mathbf{C}$. Since $e^2=e$, eAe is a subalgebra of A with e as identity. By the assumed norm condition, $\|e\|=1$ and $\|exe\|=\|x\|$ for all $x\in A$. Thus the map $x\to exe$ is a linear isometry of A onto eAe and eAe has a 'multiplicative norm'. It follows by theorem 1 that eAe is isometrically isomorphic to $\mathbf{C}$. Now A and $\mathbf{C}$ are isomorphic as vector spaces, and for $x\in A$, $x\neq 0$, we have $\|x^2\|=\|x\|^2>0$. Therefore, applying lemma 2, A has an identity, and the result follows from theorem 1.

R. S. Doran, Texas Christian University, Fort Worth, USA

REFERENCES

1 R. Arens: Linear topological division algebras. Bull. Am. Math. Soc. *53*, 623–630 (1947).
2 R. Larsen: Banach algebras, an introduction. Marcel Dekker, Inc., New York 1973.
3 S. Mazur: Sur les anneaux linéaires. C.R. Acad. Sci., Paris *207*, 1025–1027 (1938).
4 C. Rickart: General theory of Banach algebras. D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.
5 G. Simmons: Introduction to topology and modern analysis. McGraw-Hill, New York 1963.

Aufgaben

Aufgabe 816. $a_1, a_2, \ldots, a_s$ seien gegebene positive Zahlen und $0<r<1$. Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsformel

$$a_n=(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-s})^r, \qquad n>s$$

bestimmt. Man beweise die Konvergenz von (a_n) und bestimme ihren Grenzwert.

E. Trost, Zürich

Solution: This problem is solved by applying the following more general

Theorem. *Let $g:\mathbf{R}_+^k\to\mathbf{R}_+^k$ (where $\mathbf{R}_+^k$ denotes the positive octant in $\mathbf{R}^k$) be increasing with respect to each of its arguments. Suppose that the function $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$, defined by $f(x):=g(x,x,\ldots,x)$ is continuous and satisfies*

$$f(x)>x \quad \text{for} \quad 0<x<a, \qquad f(x)<x \quad \text{for} \quad x>a,$$

for some $a>0$. Let the sequence (a_n) satisfy $a_n>0$ $(n=0,\ldots,k-1)$ and

$$a_{n+k}=g(a_{n+k-1},\ldots,a_n) \qquad (n=0,1,\ldots).$$