

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1980)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$A(z)$ is isometrically isomorphic to \mathbf{C} . Hence, $A(z)$ contains a nonzero idempotent e corresponding to 1 in \mathbf{C} . Since $e^2 = e$, eAe is a subalgebra of A with e as identity. By the assumed norm condition, $\|e\| = 1$ and $\|exe\| = \|x\|$ for all $x \in A$. Thus the map $x \rightarrow exe$ is a linear isometry of A onto eAe and eAe has a 'multiplicative norm'. It follows by theorem 1 that eAe is isometrically isomorphic to \mathbf{C} . Now A and \mathbf{C} are isomorphic as vector spaces, and for $x \in A$, $x \neq 0$, we have $\|x^2\| = \|x\|^2 > 0$. Therefore, applying lemma 2, A has an identity, and the result follows from theorem 1.

R. S. Doran, Texas Christian University, Fort Worth, USA

REFERENCES

- 1 R. Arens: Linear topological division algebras. Bull. Am. Math. Soc. 53, 623–630 (1947).
- 2 R. Larsen: Banach algebras, an introduction. Marcel Dekker, Inc., New York 1973.
- 3 S. Mazur: Sur les anneaux linéaires. C.R. Acad. Sci., Paris 207, 1025–1027 (1938).
- 4 C. Rickart: General theory of Banach algebras. D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.
- 5 G. Simmons: Introduction to topology and modern analysis. McGraw-Hill, New York 1963.

Aufgaben

Aufgabe 816. a_1, a_2, \dots, a_s seien gegebene positive Zahlen und $0 < r < 1$. Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsformel

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-s})^r, \quad n > s$$

bestimmt. Man beweise die Konvergenz von (a_n) und bestimme ihren Grenzwert.

E. Trost, Zürich

Solution: This problem is solved by applying the following more general

Theorem. Let $g: \mathbf{R}_+^k \rightarrow \mathbf{R}_+^k$ (where \mathbf{R}_+^k denotes the positive octant in \mathbf{R}^k) be increasing with respect to each of its arguments. Suppose that the function $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, defined by $f(x) := g(x, x, \dots, x)$ is continuous and satisfies

$$f(x) > x \quad \text{for } 0 < x < a, \quad f(x) < x \quad \text{for } x > a,$$

for some $a > 0$. Let the sequence (a_n) satisfy $a_n > 0$ ($n = 0, \dots, k-1$) and

$$a_{n+k} = g(a_{n+k-1}, \dots, a_n) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Then $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

Proof: Define $b_n := \min S_n$, $c_n := \max S_n$, where

$$S_n := \{a_{kn}, \dots, a_{kn+k-1}, a\}.$$

Then one finds successively

$$a_{kn+k} = g(a_{kn+k-1}, \dots, a_{kn}) \geq f(b_n) \geq b_n,$$

.

.

.

$$a_{kn+2k-1} \geq f(b_n) \geq b_n$$

and hence

$$b_{n+1} \geq f(b_n) \geq b_n.$$

Notice that f is increasing so that $a \geq f(b_n)$. We conclude that $\beta := \lim b_n$ exists. By the continuity of f we must have $f(\beta) = \beta$ and hence $\beta = a$. Similarly one finds

$$c_{n+1} \leq f(c_n) \leq c_n$$

and hence $\gamma := \lim c_n$ exists and satisfies $\gamma = f(\gamma)$, that is $\gamma = a$. Since

$$b_n \leq a_{kn+j} \leq c_n \quad (j=0, \dots, k-1)$$

it follows that $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

Application to the problem: Take $g(x_1, x_2, \dots, x_s) = (x_1 + \dots + x_s)^r$ in the theorem. The convergence of the sequence (a_n) then follows and the value of the limit a follows from $a = (sa)^r$, i.e.

$$a = s^{r/(1-r)}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), P. Erdős, J. Fehér (Pécs, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), M. Kaletsch und H.B. Sieburg (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), R. Unsin (Köln, BRD), H. Walser (Frauenfeld), K. Witsch (St. Augustin, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 817. Man bestimme alle Polynome f mit komplexen Koeffizienten, welche der Gleichung $f(x)f(-x) = f(x^2)$ genügen.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers: Aus der Gleichung erhält man unmittelbar:

- (1) Mit u ist auch u^2 eine Wurzel von f .
- (2) Mit u ist auch mindestens eine der Zahlen \sqrt{u} , $-\sqrt{u}$ eine Wurzel von f .
- (3) f ist normiert.
- (4) Mit f_1, f_2 ist auch $f_1 f_2$ eine Lösung der Gleichung.

Iteriert man (1) und (2), so müssen wegen der Endlichkeit der Wurzelmenge periodische Wurzelfolgen entstehen. Da dies für $|u| > 1$ und $0 < |u| < 1$ nicht der Fall ist, muss $u=0$ oder $|u|=1$ gelten. Ist $|u|=1$, so muss es ein kleinstes i mit $u^{2^i} = u^{2^j}$ ($j > i \geq 0$) geben; u ist also notwendigerweise eine n -te Einheitswurzel. Wir bestimmen nun die zulässigen Wurzeln u und zu jedem solchen u die Menge W_u der aus u durch Iteration von (1) und (2) erzeugten Wurzeln. Zu jedem u geben wir ein Polynom f_u an, das genau die Elemente von W_u als einfache Wurzeln hat. Mit (4) erhalten wir schliesslich aus den f_u die allgemeine Lösungsschar.

Doch zuvor beweisen wir einen

Hilfssatz. $v = \exp(i\psi_0)$ mit $\psi_0 = k_0\pi/n$, $(k_0, n) = 1$, k_0 ungerade, $k_0 \leq 2n-1$ kann nicht Wurzel von f sein.

Beweis: Andernfalls wäre nach (2) eine der Zahlen $\psi'_1 = k_0\pi/2n$ oder $\psi''_1 = (k_0+2n)\pi/2n$, also eine Zahl der Form $\psi_1 = k_1\pi/2n$ mit $(k_1, n) = 1$, k_1 ungerade, $k_1 \leq 2^2n-1$, ebenfalls Argument einer Wurzel. Iteration von (2) ergäbe eine unendliche Folge verschiedener Wurzeln.

Wegen des Hilfssatzes scheiden bereits alle n -ten Einheitswurzeln $\neq 1$ mit geradem n aus: Das Argument $\psi = 2m\pi/n$ mit $m < n$ lässt sich jedenfalls auf die Form $\psi = 2m'\pi/n'$ mit ungeradem m' und geradem n' bringen. Nach (2) ist eine der Zahlen $m'\pi/n'$ oder $(m'+n')\pi/n'$ Argument einer Wurzel, was aber für beide dank dem Hilfssatz ausgeschlossen ist. Alle noch verbleibenden Wurzeln sind zulässig.

Ist $u=0$, so $W_0 = \{0\}$ und $f_0(x) = -x$.

Für $u=1$ liefert (1) keine weitere Wurzel, (2) ausser 1 höchstens noch -1 mit dem verbotenen Argument π . Somit ist $W_1 = \{1\}$ und $f_1(x) = 1-x$.

Sei jetzt u eine n -te Einheitswurzel $\neq 1$ mit ungeradem $n \geq 3$, ihr Argument ist $\psi = 2m\pi/n$, $0 < m < n$. Um Wiederholungen zu vermeiden, setzen wir $(m, n) = 1$ voraus. Wegen $(2, n) = 1$ gilt $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. In der primen Restklassengruppe P_n erzeugt 2 eine Untergruppe U_n der Ordnung $k_n, k_n | \varphi(n)$; wir setzen $\psi(n)/k_n = d_n$. Es gilt $m \in P_n$ für jedes zulässige m . Wir wählen $m_1 = 1$ aus U_n und m_2, m_3, \dots, m_{d_n} aus verschiedenen Nebenklassen von U_n aus. Jedes der Argumente $\psi_i = 2m_i\pi/n$, $i = 1, 2, \dots, d_n$, gibt vermöge (1) Anlass zu k_n verschiedenen Argumenten $2\psi_i, 2^2\psi_i, \dots, 2^{k_n}\psi_i = \psi_i$ (hier und im folgenden sind alle Argumente ins Intervall $]0, 2\pi[$ reduziert zu denken). (1) liefert daraus keine neuen Werte; (2) führt von $2^r\psi_i$ auf das schon gezählte $2^{r-1}\psi_i$ oder auf $2^{r-1}\psi_i + \pi = (2^r m_i + n)\pi/n = s\pi/n$ mit ungeradem s , was nach dem Hilfssatz nicht in Frage kommt. Ist u_i die zu ψ_i gehörende Einheitswurzel, so erhalten wir d_n disjunkte Wurzelmenge $W_{n,i} = \{u_i, u_i^2, \dots, u_i^{k_n-1}\}$, $i = 1, 2, \dots, d_n$ und d_n Polynome $f_{n,i}(x) = (u_i - x)(u_i^2 - x) \cdots (u_i^{k_n-1} - x)$.

Alle Polynome $f_0, f_1, f_{n,i}$ erfüllen offensichtlich die gegebene Gleichung. Somit ist nach (4) deren allgemeine Lösung

$$f = f_0^{r_0} f_1^{r_1} \prod_{v=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d_{2v+1}} f_{2v+1,i}^{s_{v,i}}, \quad r_0, r_1, s_{v,i} \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Weitere Beiträge sandten L. Carlitz (Durham, USA), A. Fort (Padova, I), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), R. Unsinn (Köln, BRD), K. Witsch (St. Augustin, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 818. G_m bezeichne die additive bzw. die multiplikative Gruppe aller bzw. aller regulären komplexen (m, m) -Matrizen, Z_n die multiplikative Gruppe der komplexen zyklischen Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \end{bmatrix}$$

Man bestimme alle stetigen Lösungen $F: G_m \rightarrow Z_n$ der Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} F(X+Y) &= F(X)F(Y) \quad \text{mit} \quad F(O) = E_n \quad \text{und} \\ F(T^{-1}XT) &= F(X) \quad \text{für alle} \quad x \in G_m \quad \text{und alle regulären} \quad T \end{aligned} \quad (1)$$

bzw.

$$F(XY) = F(X)F(Y) \quad \text{mit} \quad F(E_m) = E_n \quad (2)$$

E_m, E_n bezeichnen jeweils die Einheitsmatrix.

H. Kappus, Rodersdorf

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_0(X) & f_1(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-1}(X) \\ f_{n-1}(X) & f_0(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-2}(X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(X) & f_2(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_0(X) \end{bmatrix}$$

mit $f_k: G_m \rightarrow \mathbf{C}$. Mit Hilfe der n -ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon_v = \exp \frac{2\pi i v}{n}, \quad v = 0, \dots, n-1$$

bilden wir die Funktionen

$$\varphi_v(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_v^k f_k(X), \quad v = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

Dann gilt bekanntlich

$$F(X) = U \operatorname{diag}(\varphi_0(X), \dots, \varphi_{n-1}(X)) U^{-1}, \quad \text{wobei } U = (\varepsilon_k^j).$$

F ist also genau dann eine Lösung von (1) bzw. (2), wenn die Funktionen φ_ν den Funktionalgleichungen

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X)\varphi(Y) \quad (4)$$

mit den entsprechenden Anfangs- und Invarianzbedingungen genügen. Die Lösungsmengen von (4) sind wohlbekannt (siehe z. B. [1], S. 242):

$$\varphi_\nu(X) = \exp(c_\nu \cdot \operatorname{tr} X), \quad c_\nu \in \mathbb{C} \quad (5)$$

($\operatorname{tr} X$ bezeichnet die Spur der Matrix X) bzw.

$$\varphi_\nu(X) = |\det X|^{c_\nu} \quad \text{oder} \quad \varphi_\nu(X) = \operatorname{sgn}(\det X) |\det X|^{c_\nu}, \quad c_\nu \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Zwecks Auflösung von (3) nach den f_k multiplizieren wir (3) mit ε_j^ν und summieren über $\nu = 0, \dots, n-1$. Unter Beachtung von

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon_\nu^k \varepsilon_j^\nu = \begin{cases} n, & \text{falls } j+k \equiv 0 \pmod{n} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich

$$f_k(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{2\pi i \nu k}{n}\right) \varphi_\nu(X), \quad k=0, \dots, n-1. \quad (7)$$

Damit sind alle stetigen Lösungen von (1) bzw. (2) gefunden.

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Aczel: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel 1961.

Eine weitere Lösung sandte M. L. J. Hautus (Eindhoven, NL). Er zeigt, dass die allgemeine Lösung von (1) bzw. (2) in der Form

$$F(X) = \exp\{(\operatorname{tr} X)A\}, \quad A \in \mathbb{Z}_n$$

bzw.

$$F(X) = \exp\{(\log \det X)A\}, \quad A \in \mathbb{Z}_n, \quad e^{2\pi i A} = E_n$$

darstellbar ist.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1980* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

Aufgabe 834. Zu gegebenen $m, j \in \mathbb{N}$ bezeichne $N(j, m)$ die kleinste natürliche Zahl n , für welche

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m i^{-k} \geq j$$

gilt. Man bestimme

$$g_m = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N(j+1, m)}{N(j, m)}.$$

J. Dankert, Magdeburg, DDR
W. Moldenhauer, Rostock, DDR

Aufgabe 835. Es seien a_i ($i=1, \dots, n$) und m natürliche Zahlen. Unter $a_i^{1/m}$ werde die positive Lösung der Gleichung $x^m = a_i$ verstanden. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Sind die Zahlen $a_i^{1/m}$ sämtlich irrational, so ist auch $s := a_1^{1/m} + \dots + a_n^{1/m}$ irrational.

P. Mihailescu, Zürich

Aufgabe 836. Gesucht ist die Konstruktion der Verbindungsgeraden zweier weit entfernter Punkte in der euklidischen Ebene mit eingeschränkten Konstruktionshilfsmitteln. Zur Verfügung stehen ein gerades Lineal mit der festen Länge L und ein Zirkel mit fest eingestelltem Radius $R < L$.

W. Gamerith und P. Schöpf, Graz, A

Literaturüberschau

Optimal Estimation in Approximation Theory. Hrsg. Ch.A. Micchelli und Th.J. Rivlin. IX und 300 Seiten. US\$ 35.40. Plenum Press, New York, London 1977.

Der Band enthält die gesammelten Arbeiten einer internationalen Tagung mit dem oben erwähnten Titel, welche im Jahre 1976 in Freudenstadt, BRD, stattfand. Abstrakt kann das Hauptthema der Tagung, die optimale Rekonstruktion von Funktionen, wie folgt beschrieben werden: Für eine unbekannte Funktion f aus einer gegebenen Funktionsklasse soll aus einer zur Verfügung stehenden