

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1980)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 25.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

daran, dass der Rechner auf Exponentialanzeige umstellt. Dies trifft beim folgenden Beispiel 2 zu.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} a(x) = \varphi_0(x) &= 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 7x - 5, \\ \beta(x) = \varphi_1(x) &= 15x^4 + 20x^3 - 9x^2 + 2x + 7. \end{aligned}$$

Der Ausdruck des Rechners ist – soweit er ganzzahlig ist – in der rechten Spalte von Figur 5 festgehalten. Bei $\varphi_4(x)$ angelangt, hat der Rechner als nächstes mit dem Faktor $h = 47023^2 = 2213043849$ das zu $\varphi_3(x)$ assoziierte Polynom zu bestimmen. Da schon h eine 10stellige Zahl ist, gerät man mit diesem Schritt über den Bereich der Ganzzahligkeit hinaus. (Fortsetzung im nächsten Heft.)

M. Jeger, Mathematisches Seminar, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Birkhoff und S. Mac Lane: A Survey of modern Algebra, 4. Aufl. New York, London 1977.
- 2 M. Jeger: Algorithmische Kombinatorik auf der Stufe programmierbarer Taschen-Rechner. ZAMP, Heft 2, S. 243–260 (1979).
- 3 R. Kochendörffer: Einführung in die Algebra, 4. Aufl. Berlin 1974.
- 4 W. Krull: Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, Band I. Sammlung Göschen, Bd. 930, 3. Aufl. Berlin 1963.
- 5 N. Obreschkoff: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. Berlin 1963.

Kleine Mitteilungen

Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus

Die Cantorsche Abbildung benutzt man im allgemeinen, um zu zeigen, dass $J =]0, 1[$ und $J \times J$ dieselbe Mächtigkeit haben. Sie ist folgendermassen definiert (vgl. [2], S. 66): Jedes $x \in J$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-a_1 - \dots - a_n}$, wobei $\{a_n\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist. Dies gilt, da sich x in eindeutiger Weise in einen dyadischen Bruch mit unendlich vielen Einsen entwickeln lässt. Die Darstellung liefert für jedes $n \in \mathbf{N}$ [\mathbf{N} bezeichnet die natürlichen Zahlen (ohne Null)] eine Abbildung X_n von J nach \mathbf{N} , die durch $X_n(x) = a_n$ gegeben ist. Für alle $x, y \in J$ sei $f(x, y) \in J$ definiert vermöge $X_{2n-1}(f(x, y)) = X_n(x)$ und $X_{2n}(f(x, y)) = X_n(y)$, $n \in \mathbf{N}$. f ist eine bijektive Abbildung von $J \times J$ auf J . Hausdorff ([2], S. 377) nennt sie Cantorsche Abbildung. Er sagt, sie rühre im Prinzip von Cantor her (vgl. [1]).

Es ist wohlbekannt, dass es keine stetige bijektive Abbildung von $J \times J$ auf J gibt ([2], S. 377). Also ist f nicht stetig. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass die Unstetigkeitsstellen von f auf abzählbar vielen Hyperebenen $\mathbf{R} \times \{y\}$ bzw. $\{x\} \times \mathbf{R}$ liegen, wobei $x, y \in \{z \in J : z = k \cdot 2^{-l}, k, l \in \mathbf{N}\}$ gilt und \mathbf{R} die reellen Zahlen bezeichne. Das Ziel dieser Note ist es, einen elementaren Beweis dafür zu geben, dass f ein Borel-Isomorphismus ist.

Satz. Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus.

Beweis: Die σ -Algebra der Borelschen Mengen von J wird erzeugt von den Mengen $\{x: X_1(x)=k_1, \dots, X_n(x)=k_n\}$, wobei $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ und $k_n \geq 2$ ist. In der Tat, sei $z = 2^{-l_1} + \dots + 2^{-l_1 - \dots - l_j}$, $z_0 = 0$ und $z_k = 2^{-l_1} + \dots + 2^{-l_1 - \dots - l_k}$, wobei $j, k, l_1, \dots, l_j \in \mathbb{N}$ und $k \leq j$ sei, dann gilt $]0, z] = \bigcup_{k=1}^j]z_{k-1}, z_k]$, $]z_{k-1}, z_k] = \bigcup_{m=1}^{\infty}]z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m)}, z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m-1)}]$ und $]z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m)}, z_{k-1} + 2^{-l_1 - \dots - (lk+m-1)}]$
 $= \{x: X_1(x)=l_1, \dots, X_{k-1}(x)=l_{k-1}, X_k(x)=l_k+m\}$.

f ist nun Borel messbar, da $f^{-1}\{z: X_1(z)=k_1, \dots, X_n(z)=k_n\} = \{x: X_i(x)=k_{2i-1}, i=1, \dots, [n/2] + \delta_n\} \times \{y: X_j(y)=k_{2j}, j=1, \dots, [n/2]\}$ gilt ($\delta_n = 1$ für $n = 2m + 1$ und $\delta_n = 0$ für $n = 2m$).

Schliesslich ist f^{-1} Borel messbar, da

$f(\{x: X_1(x)=k_1, \dots, X_m(x)=k_m\} \times \{y: X_1(y)=l_1, \dots, X_n(y)=l_n\}) = \{z: X_{2i-1}(z)=k_i, X_{2j}(z)=l_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$ gilt.

Die rechte Seite ist ein endlicher Durchschnitt von Mengen $\{z: X_r(z)=s\}$, $r, s \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind Borel messbar wegen der Gleichung $\{z: X_r(z)=s\}$

$$= \bigcup_{k_1, \dots, k_{r-1} \in \mathbb{N}} \{z: X_1(z)=k_1, \dots, X_{r-1}(z)=k_{r-1}, X_r(z)=s\}.$$

D. Mussmann und D. Plachky, Münster, Westfalen

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. J. reine angew. Math. 84, 242-258 (1878).
- 2 F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Chelsea Publication Co., New York 1949.

Aufgaben

Aufgabe 819. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die grösste natürliche Zahl $t(n)$ mit folgender Eigenschaft: In jeder 5zeiligen und n -spaltigen Matrix aus Nullen und Einsen gibt es zwei Zeilen, die in $t(n)$ Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten.
 H. Harborth und J. Mengersen, Braunschweig, BRD

Lösung der Aufgabensteller: Jede Spalte einer beliebigen fünfzeiligen und n -spaltigen Matrix M aus Nullen und Einsen enthält mindestens drei Nullen oder drei

Einsen. Damit enthält ein Zeilentripel T der $\binom{5}{3} = 10$ möglichen Zeilentripel von

M nach dem Schubfachprinzip in mindestens $\lceil n/10 \rceil$ Spalten jeweils drei Nullen oder drei Einsen ($\lceil x \rceil$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen die kleinste ganze Zahl $\geq x$ bzw. die grösste ganze Zahl $\leq x$). Da in jeder der übrigen Spalten in T mindestens zwei Nullen oder zwei Einsen stehen, enthält eines der drei Zeilenpaare aus T in mindestens

$$\left\lceil \frac{1}{3} (n - \lceil n/10 \rceil) + \lceil n/10 \rceil \right\rceil$$