Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 35 (1980)

Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Immerhin lassen sich unsere Ergebnisse zu Algorithmen zur effektiven Abschätzung von $s(k,m)$ verwenden. Dabei zeigt sich, dass Satz 1 bereits sehr oft hilfreich sein kann.

Detlef Laugwitz, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

1 Am. Math. Monthly: Advanced Problem 6148. Proposed by Charles Small: *84*, 300 (1977); solution by R.L. McFarland: *86*, 61 (1979).
2 G.H. Hardy und E.M. Wright: Einführung in die Zahlentheorie. München 1958.

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung über Stammfunktion und Zwischenwerteigenschaft

Es bezeichnen im folgenden R die Menge der reellen Zahlen und I ein beschränktes oder nichtbeschränktes Intervall von R. Den Begriff der Stammfunktion verstehen wir hier im engeren Sinne (für eine erweiterte Fassung vgl. [1], S. 159): $g:I\to R$ heisst eine *Stammfunktion der Funktion* $f:I\to R$ *auf* I, wenn für *jede* Stelle x von I gilt: g bei x differenzierbar und $g'(x)=f(x)$. Wir sagen, $f:I\to R$ habe die *Zwischenwerteigenschaft auf* I, wenn gilt: Sind $a,b\in I$ mit $f(a)\neq f(b)$ und d zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein c zwischen a und b mit $f(c)=d$.
Die Eigenschaft von f, auf I eine Stammfunktion zu besitzen, steht bekanntlich in keiner einfachen Implikationsbeziehung zur Riemann-Integrierbarkeit auf den kompakten Teilintervallen von I (vgl. [4], S. 146–147). Die leider viel zu wenig bekannte Tatsache $(*)$ $g:I\to R$, g auf I differenzierbar $\Rightarrow g'$ hat die Zwischenwerteigenschaft auf I (vgl. z.B. [3], S. 25) ist nun mitbeteiligt an der Begründung der folgenden Aussage.

Satz. *Für* $f:I\to R$ *und die Bedingungen*
(i) f *ist auf* I *stetig,*
(ii) f *besitzt eine Stammfunktion auf* I,
(iii) f *hat die Zwischenwerteigenschaft auf* I
gilt (i) $\not\Leftrightarrow$ *(ii)* $\not\Leftrightarrow$ *(iii).*

[Man beachte, dass (i) $\Rightarrow$ (iii) die Aussage des Bolzanoschen Zwischenwertsatzes ist.]

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) lässt sich in bekannter Weise mit Hilfe des Riemannschen Integrals begründen, und (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt aus $(*)$. Für (ii) $\not\Rightarrow$ (i) wähle man $I=R, f(x)=\sin(1/x)\,(x\neq 0), f(0)=0$ (vgl. [1], S. 164, Problem 6a, oder [2]). Schliesslich sei $h(x)=\sin(1/x)\,(x\neq 0), h(0)=1$. h hat die Zwischenwerteigenschaft auf R. Es sei nun g_1 eine Stammfunktion der vorhin erwähnten Funktion f auf R. Besässe auch h eine Stammfunktion g_2 auf R, so wäre g_2-g_1 auf R differenzierbar und $[g_2(x)-g_1(x)]'$

$= g_2'(x) - g_1'(x) = h(x) - f(x)\,(x \in R)$, also $g_2'(x) - g_1'(x) = 0\,(x \neq 0)$ und $g_2'(0) - g_1'(0) = 1$, im Widerspruch zu $(*)$. Damit ist auch (iii) $\not\Rightarrow$ (ii) begründet. Jürg Rätz, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis. Academic Press, New York, London 1960.
2 R.E. Dowds: Problem E1970. Am. Math. Monthly *75*, 678 (1968).
3 O. Haupt und G. Aumann: Differential- und Integralrechnung, II. Band. De Gruyter, Berlin 1938.
4 I.P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie-Verlag, Berlin 1961.

Inequalities of Yff type in the triangle

Let P be a point in the interior of a triangle (T) of vertices A_1, A_2, A_3 and of vertex angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Connect P to the vertices of (T) and put $\beta_1 = \angle PA_1A_2$, $\beta_2 = \angle PA_2A_3$, etc. If $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ then P is one of the Brocard points of (T) and $\beta_i = \omega$ the value of the Brocard angle of (T). In this case, we have shown in this Journal [*29*, 141–142 (1974)], that

$$8\,\omega^3 \leqslant \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \tag{1}$$

Here we prove that ω satisfies

$$\omega^3 \leqslant (\alpha_1 - \omega)(\alpha_2 - \omega)(\alpha_3 - \omega), \tag{2}$$

an inequality that improves (1).
To prove (2), we use, as in the proof of (1), $\sin\omega/\omega \geqslant \sin(\pi/6)/(\pi/6)$ the arithmetic-geometric mean inequality, and the theorem of Ceva. We get

$$\begin{aligned}\sin^6\omega = \prod \sin\omega \sin(\alpha_i - \omega) &\leqslant \left[\prod \omega\,(\alpha_i - \omega)\right] \left[\frac{\sin(\pi/6)}{(\pi/6)}\right]^6 \\ &\leqslant \left[\prod \omega\,(\alpha_i - \omega)\right] [\sin\omega/\omega]^6,\end{aligned} \tag{3}$$

which readily yields (2). Now (2) and $\omega\,(\alpha_i - \omega) \leqslant (\alpha_i/2)^2$ imply $\omega^6 \leqslant \prod (\alpha_i/2)^2$ which gives (1). Note that strict inequality holds in (2) unless (T) is equilateral.
In general, if β_i is as described above then the smaller of the two products $\prod \beta_i$ and $\prod(\alpha_i - \beta_i)$ is less than or equal to $\prod (\alpha_i/2)$; and it appears probable that *both* products are less than or equal to $\prod (\alpha_i/2)$. In other words, it appears that the following inequality

$$\max\left(\prod \beta_i, \prod (\alpha_i - \beta_i)\right) \leqslant \prod (\alpha_i/2) \tag{*}$$

is true.
In trying to establish (*), it is natural to consider first the case $\beta_i = \omega$. In view of our

inequality (2), this case reduces to the problem of establishing the following inequality:

$$\prod(\alpha_i-\omega)\leqslant\prod(\alpha_i/2). \tag{**}$$

However, we have not been able to establish either of (*) or (**).
There exist in the plane of (T) points P such that $\prod\beta_i=\prod(\alpha_i-\beta_i)$. For such points, inequality (*) is easily verified. Examples of such points are the orthocenter and the circumcenter, when (T) is acute, and the incenter. This suggests the following problem which appears to be of interest.

Problem: Find all points interior to (T) such that $\prod\beta_i=\prod(\alpha_i-\beta_i)$, and discuss any special properties of the set of all such points.
Finally we note that, if in (*) the values of the angles are replaced by the sines of these angles, then the resulting inequalities are much easier. Indeed, the same method used above gives,

$$\prod\sin\beta_i\leqslant\prod\sin(\alpha_i/2). \tag{4}$$

In particular if, in (4), P is taken to be the orthocenter, we get

$$\prod\cos(\alpha_i)\leqslant\prod\sin(\alpha_i/2). \tag{5}$$

Faruk F. Abi-Khuzam, American University of Beirut

Elementarmathematik und Didaktik

Reguläre Kettenbrüche und quadratische diophantische Probleme

Einleitung

Die Theorie der regulären Kettenbrüche, zeitweise etwas in Vergessenheit geraten, hat doch immer wieder das Interesse der Mathematiker gefesselt und auch Anregung zum Experimentieren geboten. Verschiedene recht einfach zu formulierende Resultate eignen sich vorzüglich zu einer Behandlung im Rahmen der Elementarmathematik. Wir besprechen hier zwei Anwendungen auf quadratische diophantische Probleme, nämlich 1. die Pellsche Gleichung, welche in der Theorie der quadratischen diophantischen Gleichungen mit zwei Unbekannten eine zentrale Rolle spielt, sowie 2. einen etwas ungewohnten Aspekt der pythagoreischen Zahlen, d.h. der ganzen Zahlen, welche Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken darstellen.
Bei diesem Aufsatz handelt es sich um eine völlig umgeschriebene und stark